PRIMER CONGRESO ESPAÑOL SOBRE TECNOLOGIAS Y LOGICA FUZZY
UNIVERSIDAD DE GRANADA (1991) 97-101

APLICACION DE TECNICAS DE PROPAGACION DE INCERTIDUMBRE A LA MODELIZACION DEL MODUS PONENS DIFUSO

L.M. De Campos, A. Gonzalez

DEPTO. DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION E INTELIGENCIA ARTIFICIAL. UNIV. GRANADA
18071- GRANADA

1. INTRODUCCION

La lógica difusa nos proporciona una base sistemática para la representación y manipulación del conocimiento incierto e impreciso, que normalmente aparece en un Sistema Basado en el Conocimiento. Quizás una de las herramientas básicas de la lógica clásica bivaluada sea el modus ponens. En lógica difusa necesitamos una herramienta similar que nos permita deducir nuevo conocimiento a partir del que ya poseemos. En particular, nos vamos a ocupar del siguiente problema de inferencia a partir de premisas vagas o difusas:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Si } X \text{ es } A \text{ entonces } Y \text{ es } B\\ \quad X \text{ es } A'\end{array}}{\qquad\qquad Y \text{ es } B'} \tag{1}$$

en donde X e Y son variables sobre referenciales U y V, respectivamente, y A, B, A' son conjuntos difusos sobre sus respectivos referenciales. Estos conjuntos difusos pueden considerarse como informaciones difusas o restricciones elásticas de cada variable. B' es la restricción difusa que se obtiene como respuesta a la restricción difusa A' de X.

Obviamente, cuando los predicados son crisp, esta regla de inferencia es el modus ponens. Zadeh [9] propuso un método para obtener B', llamado modus ponens generalizado, que está basado en la utilización de la regla composicional de inferencia. Distintos autores han investigado el comportamiento de este método [5],[6], [8], e incluso, algunos de ellos han planteado algunas deficiencias del mismo [7].

En este trabajo vamos a proponer un método altenativo para realizar el tipo de inferencia difusa dada por la expresión (1). En concreto, estamos interesados en modelos teóricamente bien justificados, fáciles de implementar y computacionalmente eficientes, capaces de realizar inferencia con diferentes clases de proposiciones difusas (Zadeh [10]), y además que verifiquen las propiedades que normalmente se exigen para tales modelos.

El modelo propuesto está principalmente basado en dos ideas:

1. La regla difusa "Si X es A entonces Y es B" define una relación entre los conjuntos $U_A=\{A,\neg A\}$ y $V_B=\{B,\neg B\}$, es decir, frente a la interpretación habitual que considera que la relación se establece entre los referenciales U y V, consideraremos que la regla difusa define una relación al mismo nivel de granularidad en el que la regla está expresada.
2. La relación anterior se interpretará como un condicionamiento, frente a la interpretación como implicación material, y será representada por medio de medidas de incertidumbre.

Para poder implementar estos dos ideas en un modelo concreto, necesitamos en primer lugar analizar más detalladamente las entradas a una regla difusa. Así, en general la entrada A' de (1) no tiene por qué ajustarse exactamente al antecedente de la regla, A. El modelo que vamos a proponer trasforma la información contenida en A' en información sobre U_A; esta transformación se realizará por medio de un grado de compatibilidad entre la entrada y el antecendente de la regla y su negación. Tales grados se interpretarán como una medida de incertidumbre generada sobre el conjunto U_A por la entrada A'. Si propagamos esta medida de incertidumbre, a través de la regla difusa, al conjunto V_B obtendríamos información sobre el consecuente de la regla. Para realizar esta transferencia utilizaremos un modelo de propagación de incertidumbre que fue propuesto en [3].

Hasta ahora, la respuesta del modelo de inferencia es una medida de incertidumbre sobre V_B. Combinando las funciones de pertenencia de B y $\neg$B con sus valores de incertidumbre obtendremos una única respuesta B'.

2. EL MODELO DE PROPAGACION

La manera de representar información incierta será mediante una clase de medidas difusas, las medidas representables, también llamadas probabilidades superiores e inferiores [1]. Este es un formalismo de representación bastante general e incluye como casos particulares las probabilidades, las posibilidades, las medidas de creeencia y plausibilidad, y las capacidades de Choquet de orden dos.

Sean X e Y dos variables que pueden tomar valores en los conjuntos $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ e $\{y_1,y_2,\dots,y_m\}$, respectivamente. Supongamos que disponemos de un par, $((l_X(A),u_X(A)),\ A\subseteq X)$, de medidas representables que modelizan nuestra información sobre los valores que la variable X puede tomar. Disponemos también de informaciones condicionales sobre los valores de la variable Y, supuesto conocido el valor tomado por X. Estas informaciones se modelizan también como medidas representables condicionadas, $((l(B/x_i),u(B/x_i)),\ B\subseteq Y)$, $\forall x_i\in X$. El problema de propagación consiste en obtener información relativa a los valores de la variable Y, propagando la información disponible sobre X hasta Y, por medio de las relaciones condicionales.

En [3] se obtuvo la siguiente solución general para este problema: para calcular la medida superior de cualquier subconjunto, B de Y, hay que resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$u_Y(B) = \max \sum_{i=1}^{n} u(B/x_i)h_i$$
$$\text{s.a.}$$
$$\sum_{x_i \in A} h_i \leq u_X(A), \forall A \subseteq X$$

Como se puso de manifiesto en [3], muchos casos particulares de este problema pueden resolverse directamente, sin el empleo de ninguna técnica de optimización. Precisamente, uno de estos casos será el que necesitaremos en el siguiente modelo de inferencia.

3. EL MODELO DE INFERENCIA

Para desarrollar un modelo de inferencia difusa, en primer lugar vamos a expresar la regla (1) dentro del marco del modelo de propagación de incertidumbre anterior. Así, consideremos dos variables X e Y, que toman valores en los conjuntos $U_A=\{A,\neg A\}$ y $V_B=\{B,\neg B\}$, respectivamente. La información condicional proviene de la siguiente interpretación de la regla (1): esta regla genera dos medidas superiores condicionales definidas por

$$u_Y(B/A)=1 \quad u_Y(\neg B/A)=0$$
$$u_Y(B/\neg A)=1 \quad u_Y(\neg B/\neg A)=1. \qquad (2)$$

Estamos interpretando la regla "Si X es A entonces Y es B" como un condicional, es decir, si sabemos que A es cierto, entonces podemos asegurar que B también es cierto, pero si conocemos que A es falso, entonces no podemos inferir nada sobre la verdad o falsedad de B.

Además necesitamos modelizar la información de entrada como una medida superior en U_A, que propagar hasta V_B. Esta medida se obtendrá a partir de un proceso que determine en qué medida la entrada A' es parecida a cada valor de U_A (matching). Esta medida de parecido se obtiene por medio de un grado de compatibilidad entre conjuntos difusos, usando la t-norma de Lukasiewicz:

$$u_X(A) = c(A,A') = \sup_r\{\max(\mu_A(r)+\mu_{A'}(r)-1,0)\}$$
$$u_X(\neg A) = c(\neg A,A') = \sup_r\{\max(\mu_{A'}(r)-\mu_A(r),0)\} \qquad (3)$$

La elección de esta t-norma particular permite que la compatibilidad entre dos conjuntos complementarios sea cero.

Usando el modelo de propagación anterior, las medidas condicionales obtenidas a partir de la regla y la medida u_X, obtenemos la siguiente medida superior sobre V_B:

$$u_Y(B)=1$$
$$u_Y(\neg B)=c(\neg A,A') \qquad (4)$$

Podemos considerar esta medida como una primera respuesta interesante del modelo de inferencia, que genera valores de certeza para el consecuente B y su complementario (una distribución de incertidumbre sobre las posibles respuestas). Para obtener una única respuesta B' como salida, necesitamos combinar las dos informaciones de las que disponemos, la medida superior u_Y y las funciones de pertenencia de B y ¬B. Para llevar a cabo esta combinación, la idea es producir el resultado B' como un valor esperado de μ_B y $\mu_{\neg B}$, ponderado por sus grados de certeza, por medio de una integral difusa.

Empleamos una modificación apropiada de la integral superior de Dempster [4] (un caso particular de la integral de Choquet [2]) en la que el operador máximo ha sido reemplazado por la suma acotada ($a\perp b=\min(1,a+b)$). Esta sustitución está motivada por una razón similar a la que nos indujo a elegir la t-norma de Lukasiewicz anteriormente: necesitamos t-normas y t-conormas tales que, en el primer caso, A y ¬A sean incompatibles, y en el segundo caso que B y ¬B sean exhaustivos. Esta integral modificada, cuando se aplica a nuestro problema, da como resultado el conjunto difuso B' con función de pertenencia (ver figura 1)

$$\mu_{B'}(s) = \mu_B(s)\oplus\lambda \qquad (5)$$

donde $\lambda=c(\neg A,A')$ y $\oplus$ es la t-conorma de la suma probabilística ($a\oplus b=a+b-ab$).

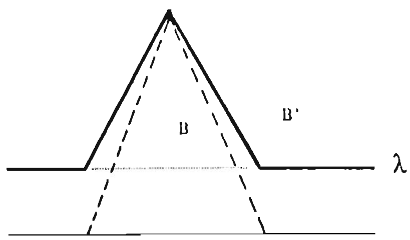

Figura 1. Salida B' en el modelo propuesto

La ecuación (5) muestra la simplicidad computacional del modelo, lo que lo hace eficiente y fácil de implementar. En cuanto a sus propiedades, verifica, entre otras, aquellas que se consideran usualmente como test para verificar un modelo de modus ponens difuso: si A'=A entonces B'=B, si $A'\subseteq\neg A$ entonces B'=V, si $A'\subseteq A$ entonces B'=B.

4. EXTENSIONES DEL MODELO DE INFERENCIA

Partiendo del modelo simple desarrollado en la sección anterior, resulta muy sencillo extenderlo en diversas direcciones. Por ejemplo, podemos incluir incertidumbre, tomando reglas del tipo:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Si X es A entonces Y es B } (\alpha)\\ \text{X es A'}\end{array}}{\text{Y es B'.}} \tag{6}$$

donde α es el grado de incertidumbre de la regla. Basta tomar como medidas condicionales las siguientes:

$$\begin{array}{ll} u_Y(B/A)=1 & u_Y(\neg B/A)=1-\alpha \\ u_Y(B/\neg A)=1 & u_Y(\neg B/\neg A)=1\,, \end{array} \tag{7}$$

Repitiendo el proceso anterior se obtiene como salida B' con función de pertenencia

$$\mu_{B'}(s) = \mu_B(s)\oplus\lambda\oplus(1-\alpha) \tag{8}$$

donde $\lambda=c(\neg A,A')$ y α es la incertidumbre de la regla.

También se pueden incluir hechos no completamente ciertos, del tipo

$$\text{X es A' es } \gamma \tag{9}$$

donde γ es un grado de necesidad relativo al hecho X es A', obteniendo como resultado la siguiente fórmula

$$\mu_{B'}(s) = \mu_B(s)\oplus\lambda\oplus(1-\gamma) \tag{10}$$

donde $\lambda=c(\neg A,A')$ y γ es la incertidumbre del hecho.

También resulta simple el considerar otros tipos más complejos de reglas, que incluyan conjunciones y disyunciones en las premisas.

BIBLIOGRAFIA

[1] Campos, L.M. de, Lamata, M.T., Moral, S. (1988): Logical connectives for combining fuzzy measures, Methodologies for Intelligent Systems 3, Z.W. Ras, L. Saitta (eds.), 11-18.
[2] Campos, L.M. de, Bolaños, M.J. (1989): Representation of fuzzy measures through probabilities, Fuzzy Sets and Systems 31, 23-36.
[3] Campos, L.M. de, Moral, S. (1990): Propagating uncertain information forward. Proc. III International Conference on Information Processing an Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, B. Bouchon, R.R. Yager (eds.), 219-221 (Paris), to appear in International Journal of Intelligent Systems.
[4] Dempster, A.P. (1967): Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. Ann. Math. Statistics 38, 325-339.
[5] Delgado, M., Trillas, E., Verdegay, J.L., Vila, M.A. (1990): The generalized "Modus Ponens" with linguistic labels, Proc. International Conference on Fuzzy Logic and Neural Networks (Izuka, Japan) 725-728.
[6] Dubois, D., Prade, H. (1991): Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 1: Inference with possibility distributions, Fuzzy Sets and Systems 40, 143-202.
[7] Magrez, P., Smets, P. (1989): Fuzzy modus ponens: A new model suitable for applications in knowledge-based systems. International Journal of Intelligent Systems 4, 181-200.
[8] Mizumoto, M., Zimmermann, H.J. (1982): Comparison of fuzzy reasoning methods. Fuzzy Sets and Systems 8, 253-283.
[9] Zadeh, L.A. (1973): Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision process, IEEE Trans. Systems Man Cybernet. 3, 159-176.
[10] Zadeh, L.A. (1983): The role of fuzzy logic in the management of uncertainty in expert systems, Fuzzy Sets and Systems 11, 199-227.