

UNIVERSIDAD DE GRANADA

E.T.S. DE INGENIERÍA  
INFORMÁTICA



Departamento de Ciencias de la Computación  
e Inteligencia Artificial

RESTAURACIÓN Y RECONSTRUCCIÓN  
BAYESIANAS DE IMÁGENES USANDO  
DESCOMPOSICIONES MULTIBANDA

TESIS DOCTORAL

Javier Abad Ortega

Granada, Julio de 2003





**RESTAURACIÓN Y RECONSTRUCCIÓN BAYESIANAS DE  
IMÁGENES USANDO DESCOMPOSICIONES  
MULTIBANDA**

MEMORIA QUE PRESENTA  
**JAVIER ABAD ORTEGA**  
PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN INFORMÁTICA  
JULIO 2003

DIRECTORES  
**RAFAEL MOLINA SORIANO**  
**AGGELOS K. KATSAGGELOS**

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN  
E INTELIGENCIA ARTIFICIAL

E.T.S. DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

UNIVERSIDAD DE GRANADA



La memoria titulada **Restauración y reconstrucción bayesianas de imágenes usando descomposiciones multibanda**, que presenta D. Javier Abad Ortega para optar al grado de DOCTOR, ha sido realizada en el Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial de la Universidad de Granada bajo la dirección de los Doctores D. Rafael Molina Soriano y D. Aggelos K. Katsaggelos.

Granada, Julio de 2003

El doctorando

Los directores

Javier Abad Ortega

Rafael Molina Soriano

Aggelos K. Katsaggelos



# AGRADECIMIENTOS

Vivo en aquel amanecer  
que se echó a perder cuando ella, la milicia cruel  
te arrancó de mis brazos sin otra razón  
que aprender a...  
luchar.

Teo Cardalda (1957– )

La realización de una tesis doctoral implica, sin lugar a dudas, un proceso intelectual que pretende demostrar la capacidad investigadora del doctorando. Durante los años que ha supuesto la elaboración de esta tesis y la redacción de la presente memoria, mi objetivo era éste.

Al sentarme a escribir estos agradecimientos he reflexionado y he observado que podía tomar dos direcciones: continuar ese proceso del intelecto y expresar mi gratitud profesional a instituciones y colegas que hubieran apoyado mi trabajo; o, posiblemente por primera vez tras mucho tiempo, expresar mis sentimientos más íntimos y personales. He sentido un impetuoso impulso para expresarme en lo personal, obviando por un momento la dimensión científica de este trabajo y recreándome en aquellos que han significado algo en mi desarrollo como persona.

Así pues, el lector que desee conocer exclusivamente mi trabajo de investigación, debe obviar lo que resta de estos agradecimientos y comenzar a analizar la memoria que sigue a estas páginas. Si, por el contrario, piensa como yo que es imposible disociar al investigador de la persona, con sus afectos, sus defectos y sus sentimientos, debería continuar la lectura de esta sección, puesto que haré mención a las personas que más representan en mi vida.

En primer lugar, deseo hacer mención a mi esposa, Alicia, que ha sacrificado en muchas ocasiones su propia carrera profesional como investigadora para apoyarme en la mía. Ella ha inundado nuestro hogar de amor, alegría, ilusión y humanidad. Estoy profundamente convencido de que lo que soy, lo soy por ella. A pesar de su sacrificio y continua dedicación a nuestra familia, ha logrado desarrollar una carrera como investigadora que es digna de admiración. He aprendido mucho de ella y estoy seguro de que le aguardan muchos éxitos profesionales, pero aún más personales, como madre y esposa. Llevo más de la mitad de mi vida a su lado y soy incapaz de concebir lo que me quede por delante sin ella.

Normalmente no escuchamos a los niños, pensando que sólo tenemos que inculcarles, imbuirles, instruirles nuestros principios. Pero mi hijo Jorge me ha demostrado que son capaces de darnos grandes lecciones de valor, responsabilidad y bondad. Las circunstancias de la vida lo han puesto a prueba demasiado pronto y él ha probado ser de una madera especial. Está lleno de vida y de amor por la vida y por los demás. Estoy seguro de que en el futuro nos proporcionará grandes satisfacciones a su madre y a mí.

Por último quiero hacer mención especial a Nazaret, mi hija pequeña. Cuando tenía dos años tuvo que pasar una durísima prueba que probablemente muchos adultos no serían capaces de afrontar. Ella ha vencido al sufrimiento, al dolor, a la desesperanza y a la muerte. Yo no fui capaz de estar a su lado en los peores momentos, al menos no tanto como debía. Todos tenemos nuestros pequeños demonios y yo arrastraré éste de por vida. Nazaret nos ha enseñado a los que le rodeábamos a enfrentarnos a la vida, a sus grandezas y sus miserias. El corazón se me encoge al escribir estas líneas y me resulta muy doloroso sacar a la luz sentimientos y sensaciones enterrados cuidadosamente durante años. Por ello quiero terminar mirando al futuro a través de las palabras del poeta que abría estos agradecimientos, que reflejan fielmente lo que soy incapaz de expresar por mí mismo:

Nana, nena  
yo vigilo para tí.  
Corazón asustado  
ahora tienes que dormir.

Te ha soñado tu mamá  
y mi estrella te parió  
casi casi sin querer.

Mi sombra seguirá  
tus pasos en la vida  
desde hoy te dirá  
cual es tu salida.

Nana sí,  
nena sí,  
Papi cuida de tí.

**RESTAURACIÓN Y RECONSTRUCCIÓN BAYESIANAS DE  
IMÁGENES USANDO DESCOMPOSICIONES  
MULTIBANDA**

**JAVIER ABAD ORTEGA**



# Índice general

<b>1. Introducción y objetivos de la memoria</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción a la restauración y reconstrucción de imágenes . . . . .	1
1.2. Introducción a los problemas de restauración y reconstrucción tratados en esta memoria . . . . .	6
1.3. Objetivos y estructura de la memoria . . . . .	8
<b>2. Los problemas de la restauración y reconstrucción de imágenes. Aproximación bayesiana a su solución</b>	<b>11</b>
2.1. Introducción . . . . .	11
2.2. El modelo de formación en el problema de la restauración de imágenes	12
2.2.1. Degradaciones determinísticas . . . . .	12
2.2.1.1. Emborronamiento por movimiento lineal . . . . .	15
2.2.1.2. Emborronamiento por desenfoque uniforme . . . . .	16
2.2.1.3. Emborronamiento uniforme bidimensional . . . . .	17
2.2.1.4. Emborronamiento por turbulencia atmosférica . . . . .	17
2.2.1.5. Emborronamiento gaussiano . . . . .	19
2.2.1.6. Emborronamiento por dispersión . . . . .	19
2.2.2. Degradaciones estocásticas . . . . .	20
2.2.3. Medida de la degradación . . . . .	22
2.3. El modelo de formación en la reconstrucción de imágenes de alta resolución	22
2.3.1. Modelo para obtener las imágenes observadas de baja resolución	24
2.3.2. Medida de la calidad de las restauraciones y reconstrucciones . .	29

2.4. El paradigma jerárquico bayesiano . . . . .	31
2.4.1. Descripción del paradigma bayesiano . . . . .	32
2.4.2. Soluciones al problema de la restauración . . . . .	33
2.4.2.1. Análisis basado en la moda a posteriori . . . . .	33
2.4.2.2. Análisis basado en la evidencia . . . . .	34
<b>3. Restauración de imágenes basada en wavelets usando modelos de Gauss-</b>	
<b>Markov Generalizados</b>	<b>35</b>
3.1. Introducción . . . . .	35
3.2. Representación wavelet del problema . . . . .	38
3.3. Modelo de imagen multicanal . . . . .	40
3.4. Modelo de degradación en el dominio wavelet . . . . .	42
3.5. Modelo de hiperparámetros . . . . .	43
3.6. Restauración basada en la evidencia usando modelos de Gauss-Markov	
generalizados . . . . .	44
3.6.1. Paso de estimación de la imagen . . . . .	45
3.6.1.1. Algoritmo de restauración multicanal propuesto por Belge	
<i>et al.</i> en [14] . . . . .	46
3.6.1.2. Restauración multicanal basada en la evidencia . . . . .	48
3.6.2. Paso de estimación de parámetros . . . . .	49
3.6.3. Algoritmo de restauración multicanal con estimación simultánea	
de los hiperparámetros . . . . .	54
3.7. Resultados experimentales . . . . .	56
<b>4. Restauración de imágenes mediante la descomposición wavelet de mod-</b>	
<b>elos de imagen autorregresivos</b>	<b>77</b>
4.1. Introducción . . . . .	77
4.2. Modelo de imagen multicanal . . . . .	78
4.3. Modelo de degradación . . . . .	82
4.4. Modelo de hiperparámetros . . . . .	83

4.5. Restauración basada en la evidencia usando modelos autorregresivos multicanal . . . . .	83
4.5.1. Paso de estimación de los hiperparámetros . . . . .	83
4.5.2. Paso de estimación de la imagen original . . . . .	87
4.6. Algoritmo de restauración multicanal con estimación simultánea de los hiperparámetros basado en la descomposición de modelos autorregresivos	88
4.7. Resultados experimentales . . . . .	89
<b>5. Reconstrucción de imágenes de alta resolución con multisensores</b>	<b>105</b>
5.1. Introducción . . . . .	105
5.2. Modelo de imagen . . . . .	107
5.3. Modelo de degradación . . . . .	107
5.4. Reconstrucción de imágenes de alta resolución basada en la evidencia .	108
5.4.1. Paso de estimación de los parámetros . . . . .	108
5.4.2. Paso de estimación de la imagen original . . . . .	108
5.5. Resultados experimentales . . . . .	112
<b>Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>127</b>
Conclusiones . . . . .	127
Trabajos futuros . . . . .	128
<b>A. Estructuras matriciales para el filtrado lineal multicanal</b>	<b>131</b>
A.1. Matrices por bloques circulantes y matrices circulantes por bloques . .	131
A.2. Diagonalización de matrices particionadas . . . . .	133
<b>B. Descomposición multicanal de señales y operadores de convolución</b>	<b>137</b>
B.1. Introducción . . . . .	137
B.2. Descomposición multicanal de señales y operadores de convolución unidimensionales . . . . .	138
B.3. Descomposición multicanal de señales y operadores de convolución bidimensionales . . . . .	143

B.4. Estructuras matriciales involucradas en la formulación del problema de reconstrucción de imágenes de alta resolución con multisensores . . . .	149
--	-----

<b>Bibliografía</b>	<b>153</b>
---------------------	------------

# Índice de figuras

1.1. Emborronamiento de una de las cámaras del telescopio espacial Hubble modelizado mediante el software Tiny TIM . . . . .	3
2.1. (a) Imagen <i>cameraman</i> original. (b) Emborronamiento por movimiento lineal de 9 píxeles. (c) Imagen emborronada. . . . .	16
2.2. (a) Imagen <i>cameraman</i> original. (b) Emborronamiento por desenfoque uniforme de radio 5 píxeles. (c) Imagen emborronada. . . . .	17
2.3. (a) Imagen <i>cameraman</i> original. (b) Emborronamiento uniforme de $11 \times 11$ píxeles. (c) Imagen emborronada. . . . .	18
2.4. (a) Imagen <i>cameraman</i> original. (b) Emborronamiento por turbulencia atmosférica con $R = 3,5$ y $\beta = 3$ . (c) Imagen emborronada. . . . .	18
2.5. (a) Imagen <i>cameraman</i> original. (b) Emborronamiento gaussiano con $\sigma = 3$ . (c) Imagen emborronada. . . . .	19
2.6. (a) Imagen <i>cameraman</i> original. (b) Emborronamiento por dispersión con $\beta = 3$ . (c) Imagen emborronada. . . . .	20
2.7. Modelo de formación de imágenes . . . . .	21
2.8. (a) Imagen <i>cameraman</i> original. (b)-(g) Versión degradada con ruido gaussiano aditivo y emborronamiento por (b) movimiento, (c) desenfoque, (d) uniforme, (e) atmosférico, (f) gaussiano, (g) dispersión. . . .	23
2.9. Correspondencia entre píxeles de alta y baja resolución. . . . .	24
2.10. Imagen original $256 \times 256$ de alta resolución. . . . .	27
2.11. Imágenes de baja resolución $64 \times 64$ observadas según el modelo de degradación descrito a partir de la imagen original de la figura 2.10. . .	28

2.12. Imagen original $256 \times 256$ de alta resolución. . . . .	29
2.13. Imágenes de baja resolución $64 \times 64$ observadas según el modelo de degradación descrito a partir de la imagen original de la figura 2.12. . .	30
3.1. Diagrama de la descomposición wavelet de una imagen en cuatro canales.	38
3.2. Descomposición wavelet de una imagen. . . . .	39
3.3. Distribuciones GGMRF para distintos valores del parámetro de forma, $p$ , y con parámetro de escala $\sigma_f = 1,0$ . . . . .	41
3.4. Imágenes empleadas como banco de pruebas. . . . .	57
3.5. (a) Imagen <i>mandril</i> degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto . . . . .	67
3.6. (a) Imagen <i>mandril</i> degradada por emborronamiento por desenfoque uniforme y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto . . . . .	68
3.7. (a) Imagen <i>puerto</i> degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto . . . . .	69
3.8. (a) Imagen <i>puerto</i> degradada por emborronamiento por desenfoque uniforme y ruido gaussiano ( $SNR = 40dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto . . . . .	70
3.9. (a) Imagen <i>lena</i> degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto . . . . .	71
3.10. (a) Imagen <i>lena</i> degradada por emborronamiento por desenfoque uniforme y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto . . . . .	72
3.11. Convergencia del algoritmo propuesto para la imagen <i>mandril</i> degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ). . . . .	73

3.12. Convergencia del algoritmo propuesto para la imagen <i>puerto</i> degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano ( $SNR = 20dB$ ). . . . .	73
3.13. Convergencia del algoritmo propuesto para la imagen <i>lena</i> degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano ( $SNR = 20dB$ ). 74	
3.14. (a) Imagen <i>mandril</i> degradada por emborronamiento gaussiano con $\sigma = 2$ y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración con el algoritmo 3.1 propuesto por Belge <i>et al.</i> , (c) Restauración con el algoritmo 3.2 propuesto	75
4.1. Realizaciones de los modelos autorregresivos: (a) Condicional Autorregresivo (CAR) (b) Simultáneo Autorregresivo (SAR). . . . .	80
4.2. Descomposición wavelet 2-D del modelo de imagen en cuatro canales .	81
4.3. Imágenes empleadas como banco de pruebas. . . . .	90
4.4. (a) Imagen <i>mandril</i> degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano ( $SNR = 20dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto . . . . .	98
4.5. (a) Imagen <i>mandril</i> degradada por emborronamiento por desenfoque uniforme y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto . . . . .	99
4.6. (a) Imagen <i>puerto</i> degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto . . . . .	100
4.7. (a) Imagen <i>puerto</i> degradada por emborronamiento por desenfoque uniforme y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto . . . . .	101
4.8. (a) Imagen <i>lena</i> degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano ( $SNR = 20dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto . . . . .	102
4.9. (a) Imagen <i>lena</i> degradada por emborronamiento por desenfoque uniforme y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto . . . . .	103

4.10. (a) Imagen <i>mandril</i> degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración con el algoritmo propuesto (4 parámetros) (c) Restauración con el algoritmo propuesto (2 parámetros) . . . . .	104
5.1. Imagen original $256 \times 256$ de alta resolución. . . . .	120
5.2. Primer experimento, 30dB: (a) Supermuestreo por duplicación de píxeles de $\mathbf{g}_{0,0}$ , (b) Mejor imagen interpolada bilinealmente, (c) Imagen de alta resolución inicial, (d) Imagen de alta resolución estimada con el método propuesto, (e) Imagen de alta resolución estimada con GCV y (f) Imagen de alta resolución estimada con la L-curva. . . . .	121
5.3. Evolución de la ISNR frente al número de iteraciones para los tres conjuntos de imágenes de baja resolución. . . . .	122
5.4. (a) Supermuestreo por duplicación de píxeles de $\mathbf{g}_{0,0}$ , (b) Mejor imagen interpolada bilinealmente, (c) Imagen estimada de alta resolución (1 parámetro), (d) Imagen estimada de alta resolución (16 parámetros), (e) Imagen estimada de alta resolución mediante GCV y (f) mediante la L-curva. . . . .	123
5.5. (a) Imagen original de alta resolución, (b) Supermuestreo por reduplicación de píxeles de $\mathbf{g}_{00}$ , (c) Imagen inicial de alta resolución, (d) Imagen estimada de alta resolución. . . . .	124
5.6. (a) Criterio de convergencia frente al número de iteraciones, (b) ISNR frente al número de iteraciones, para la imagen de la figura 5.5d. . . . .	125
A.1. Sistema lineal multicanal . . . . .	132
B.1. Descomposición de una señal unidimensional . . . . .	138
B.2. Descomposición de una señal bidimensional . . . . .	144

# Índice de tablas

2.1. SNRs y varianzas del ruido para las imágenes de baja resolución de la figura 2.13. . . . .	27
3.1. Estimación de parámetros del algoritmo propuesto para la imagen <i>mandril</i> .	61
3.2. Estimación de parámetros del algoritmo propuesto para la imagen <i>puerto</i>	62
3.3. Estimación de parámetros del algoritmo propuesto para la imagen <i>lena</i>	63
3.4. Estimación de parámetros del algoritmo monocanal para la imagen <i>mandril</i> .	64
3.5. Estimación de parámetros del algoritmo monocanal para la imagen <i>puerto</i>	64
3.6. Estimación de parámetros del algoritmo monocanal para la imagen <i>lena</i> .	65
3.7. ISNRs obtenidos para la imagen <i>mandril</i> con el algoritmo propuesto (2 aproximaciones) y el algoritmo monocanal. . . . .	65
3.8. ISNRs obtenidos para la imagen <i>puerto</i> con el algoritmo propuesto (2 aproximaciones) y el algoritmo monocanal. . . . .	66
3.9. ISNRs obtenidos para la imagen <i>lena</i> con el algoritmo propuesto (2 aproximaciones) y el algoritmo monocanal. . . . .	66
3.10. RMSE obtenido para la imagen <i>mandril</i> de la figura 3.14 para los dos algoritmos de restauración multicanal considerados. . . . .	74
4.1. Estimación de parámetros del algoritmo propuesto para la imagen <i>mandril</i> .	94
4.2. Estimación de parámetros del algoritmo propuesto para la imagen <i>puerto</i> .	94
4.3. Estimación de parámetros del algoritmo propuesto para la imagen <i>lena</i> .	94
4.4. Estimación de parámetros del algoritmo monocanal para la imagen <i>mandril</i> .	95
4.5. Estimación de parámetros del algoritmo monocanal para la imagen <i>puerto</i> .	95

4.6. Estimación de parámetros del algoritmo monocanal para la imagen <i>lena</i> .	95
4.7. ISNRs obtenidos para la imagen <i>mandril</i> con el algoritmo propuesto y el algoritmo monocanal. . . . .	96
4.8. ISNRs obtenidos para la imagen <i>puerto</i> con el algoritmo propuesto y el algoritmo monocanal. . . . .	96
4.9. ISNRs obtenidos para la imagen <i>lena</i> con el algoritmo propuesto y el algoritmo monocanal. . . . .	96
4.10. ISNRs obtenidos para la imagen <i>mandril</i> con el algoritmo propuesto usando sólo dos parámetros, uno para la banda <i>LL</i> y otro para las bandas <i>LH</i> , <i>HL</i> y <i>HH</i> . . . . .	97
5.1. Resumen de resultados para los tres conjuntos de baja resolución. Cada columna muestra estadísticas para las diez simulaciones. . . . .	117
5.2. Estadísticas de las varianzas del ruido estimadas y del parámetro de regularización para las diez simulaciones de los tres conjuntos de imágenes de baja resolución con un parámetro del ruido. . . . .	118
5.3. SNR y varianzas del ruido para las imágenes de baja resolución del segundo experimento. . . . .	118
5.4. ISNR para el segundo experimento. . . . .	119
5.5. Medias de los parámetros de ruido estimados para el segundo experimento; véase la tabla 5.3. Entre paréntesis, sus desviaciones estándar para las diez realizaciones. . . . .	119
5.6. SNR y varianzas del ruido para las imágenes de baja resolución de la figura 5.5b. . . . .	119
5.7. Varianzas del ruido estimadas para la imagen de alta resolución de la figura 5.5d. . . . .	120

# Capítulo 1

## Introducción y objetivos de la memoria

Siempre hay un precio que tienes que pagar.  
Todo de golpe o día a día lo harás.  
Toda mi vida andando en la oscuridad,  
sin quererme enterar  
de que siempre hay un precio que tienes que pagar.

Enrique Urquijo (1960–1999)

### 1.1. Introducción a la restauración y reconstrucción de imágenes

El campo de la restauración de imágenes tuvo su origen en la década de 1960 con el objetivo de obtener versiones mejoradas de las imágenes transmitidas en el marco de los programas espaciales estadounidenses y soviéticos ([7], [64], [106]). Debido a las limitaciones de potencia y peso impuestas en las primeras naves espaciales, los equipos de captación empleados en estas misiones tenían una gran cantidad de limitaciones y producían imágenes degradadas por distintos fenómenos que reducían su calidad. Las primeras imágenes obtenidas de la Tierra, la Luna o Marte sufrían degradaciones extraordinariamente severas debidas a las vibraciones y al mal alineamiento de los aparatos

de captación, al movimiento de la nave, etc., lo que motivó los primeros esfuerzos para obtener el máximo de información posible a partir de estas imágenes, intentando reducir los efectos negativos causados por las degradaciones mencionadas. Para ello se comenzaron a adaptar algoritmos de procesamiento de señales unidimensionales a estos datos bidimensionales, dando lugar al área de investigación conocida como restauración de imágenes digitales.

En sus primeras etapas de desarrollo, el concepto de restauración de imágenes usando un ordenador se vio obstaculizado por el coste que suponía procesar los millones de bits de información que componen una imagen. Su elevadísimo coste hizo que la restauración de imágenes digitales fuera considerada un verdadero lujo en muchas áreas de aplicación ([106]). Sin embargo, los algoritmos comenzaron a adaptarse a los cambiantes entornos que surgieron en las décadas de 1970 y 1980, y hoy día podemos generar restauraciones rápidas y precisas de imágenes degradadas ejecutando programas en un ordenador personal.

Un factor que influyó enormemente en el cambio en la consideración de la restauración de imágenes fue el problema hallado en 1990 en el campo de la Astronomía Óptica en el espejo principal del telescopio espacial Hubble, un proyecto que había costado más de 2000 millones de dólares. La aberración esférica se debía a una curvatura errónea del espejo, producida por un pulido realizado por un instrumento defectuoso (que también se empleó para “comprobar” la corrección del pulido), lo que producía imágenes sometidas a un fenómeno de emborronamiento. El hecho de que cada minuto de observación costara 100000 dólares hizo que los costes asociados a cualquier intento por mejorar la calidad de las imágenes adquiridas resultaran asequibles, lo que impulsó la investigación sobre restauración de imágenes en Astronomía Óptica ([58], [106], [119], [151]). En la figura 1.1 podemos ver una modelización generada por el software Tiny TIM (*Telescope Image Modeling*) ([73]), desarrollado por miembros del STScI (*Space Telescope Science Institute*), de la función de dispersión puntual (*psf: point spread function*) de la cámara para objetos débiles (*FOC: Faint Object Camera*) del telescopio.

La restauración de imágenes digitales es un campo que estudia los métodos empleados para recuperar una imagen original a partir de unas observaciones degradadas. Es

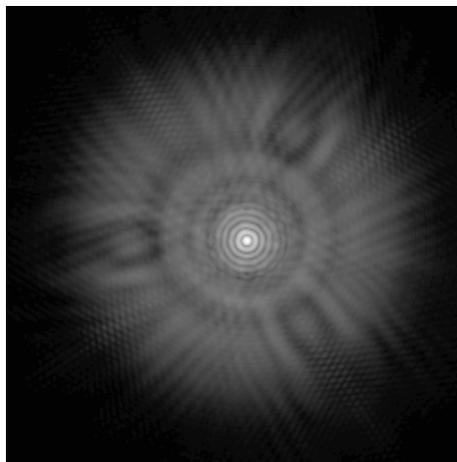


Figura 1.1: Emborronamiento de una de las cámaras del telescopio espacial Hubble modelizado mediante el software Tiny TIM

un área que se ha investigado en profundidad en el seno de las comunidades astronómica, óptica y de procesamiento de señales desde hace años. Muchos de los algoritmos empleados en este área están basados en campos de las Matemáticas como la Teoría de la Estimación, la Resolución de Problemas Inversos, el Álgebra Lineal y el Análisis Numérico.

Las técnicas de restauración de imágenes están basadas en la modelización de las degradaciones que afectan a la imagen original, normalmente emborronamiento y ruido, y a la aplicación de un procedimiento inverso para obtener una aproximación de la imagen original.

La restauración de imágenes se ha distinguido normalmente de las técnicas de mejora de imágenes, que pretenden manipular una imagen para producir resultados más agradables para el observador, sin hacer uso de modelos de degradación concretos. Las técnicas de restauración de imágenes también se diferencian de las técnicas de reconstrucción, ya que estas últimas operan sobre un conjunto de proyecciones, en lugar de hacerlo sobre una imagen observada. No obstante, la restauración y la reconstrucción comparten el mismo objetivo, esto es, la recuperación de la imagen original (o, mejor dicho, de una estimación de la misma) y terminan resolviendo el mismo proble-

ma matemático, el de encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales o no lineales.

El hecho de que la obtención de los datos (las imágenes) esté sujeta a diferentes fuentes de error hace que la inversión directa del problema produzca una magnificación de los errores. El mal condicionamiento del problema nos lleva a tratar los problemas de restauración y reconstrucción mediante métodos de la teoría de estimación estadística o mediante el enfoque de la regularización. Algunos de los métodos de estimación estadísticos más empleados han sido el de estimación por máxima verosimilitud, el de máxima entropía y el paradigma bayesiano. La estimación por máxima verosimilitud busca la maximización de la función de verosimilitud. Sin embargo, la naturaleza mal condicionada de los problemas de restauración y reconstrucción de imágenes hacen que este método sea muy sensible al ruido. Para evitar este problema es frecuente detener los algoritmos iterativos antes de alcanzar el punto de máxima verosimilitud.

Otro enfoque consiste en la aplicación de la teoría probabilística bayesiana para definir una función objetivo a maximizar diferente. El proceso buscará la imagen de mayor probabilidad a posteriori dados los datos, teniendo en cuenta también la inclusión de una distribución de probabilidad sobre la imagen, conocida como modelo a priori.

Tanto la estimación por máxima verosimilitud como la regularización pueden verse como casos particulares del enfoque bayesiano. En el caso de la máxima verosimilitud, mediante el empleo de una distribución plana no informativa como modelo de imagen y en el caso de la regularización estableciendo el modelo de imagen elegido como restricción del problema de minimización que se está resolviendo.

Se han utilizado diferentes modelos de imagen en la restauración de imágenes, destacando entre ellos las distribuciones no informativas, como es el caso de la formulación bayesiana del conocido método de Richardson-Lucy ([82],[127]), empleado fundamentalmente dentro de la comunidad astronómica, y sus extensiones ([59], [123]) y los modelos estadísticos espaciales, que se han usado también en técnicas basadas en regularización ([128], [7], [68]).

A lo largo de los años se ha venido trabajando dentro de la restauración de imágenes en muchas áreas. Entre ellos destacan: la aplicación de técnicas de restauración a imá-

genes multibanda, que intenta explotar la información complementaria y redundante existente en los diferentes canales, resultando en un problema que es necesariamente más complejo, dada su alta dimensionalidad y la necesidad de extraer e intercambiar información entre los canales ([50], [52], [70], [75], [104], [105], [122], [132] y [145]); una adecuada modelización de la información de la que se dispone sobre la imagen original, donde destaca el uso de los Campos Aleatorios de Gauss Markov Compuestos (*CGMRF: Compound Gauss Markov Random Fields*) ([55], [61], [98], [99]), que se ajustan mejor al verdadero comportamiento espacial de las imágenes, que son fundamentalmente suaves, aunque también presentan cambios bruscos de intensidad en las fronteras de los objetos; y el desarrollo de algoritmos de cálculo de la imagen, entre los que podemos citar las técnicas de gradiente ([68], [94], [123]), el algoritmo EM (*Expectation-Maximization*) ([69], [96]) o técnicas como el *Simulated Annealing* y sus modificaciones ([18], [36], [55], [101]).

Además de las áreas anteriores, como veremos con posterioridad, recientemente se ha dedicado un importante esfuerzo a la modelización de la información a priori sobre la imagen empleando descomposiciones subbanda ([11], [12], [17], [23], [76], [95], [139], [154]), formulando modelos de imagen y algoritmos de forma que podamos adaptar los parámetros que gobiernan el modelo de imagen a las características estructurales de cada una de las bandas, desarrollando algoritmos de restauración adaptativos.

También se ha desarrollado un notable interés por la combinación de imágenes de baja resolución para obtener imágenes de alta resolución. Las imágenes de baja resolución pueden ser captadas por varios sensores simultáneamente o por un único sensor a lo largo del tiempo ([19], [35], [135]). La característica más destacada de este problema es que las imágenes de baja resolución contienen observaciones diferentes pero relacionadas de la misma escena. Las diferencias entre las diferentes observaciones pueden ser debidas al desplazamiento entre los sensores o al movimiento de los objetos o del sistema de captación, lo que requerirá una formulación que introduzca el desplazamiento existente entre las diferentes imágenes observadas de baja resolución.

Tanto la descomposición subbanda del modelo de imagen como la reconstrucción de imágenes de alta resolución, que serán desarrolladas en temas posteriores, son el

objetivo de la presente memoria.

## 1.2. Introducción a los problemas de restauración y reconstrucción tratados en esta memoria

En esta memoria se aplica una interesante y potente formulación de los problemas de restauración de imágenes y reconstrucción de imágenes de alta resolución mediante su formulación multicanal.

Al analizar el problema de la restauración de imágenes, mostraremos que el uso de estructuras matriciales multicanal en el contexto del análisis wavelet conduce a un potente enfoque de modelización de la no estacionaridad de las imágenes. Esta aproximación requiere la descomposición de imágenes en subbandas y, por lo tanto, un tratamiento eficiente de cada subbanda. Se podría decir que, en este marco de trabajo, cada subbanda extraída de la imagen juega el papel de una imagen en la formulación tradicional de la restauración de imágenes.

Las fronteras de un objeto contienen una gran parte de su información perceptual ([111]), ya que definen las diferentes regiones de interés, por lo que resulta interesante orientar los algoritmos de procesamiento de imágenes para que tengan en cuenta estas fronteras. Puesto que la transformada wavelet se puede ver como una herramienta para manipular y reflejar el comportamiento de las fronteras de la imagen, esta perspectiva ha dado lugar a algoritmos de codificación ([9], [86]), reconstrucción ([71], [129]) y mejora ([87]) de imágenes que son sensibles a la importancia perceptual de las fronteras para el observador humano.

A la vez que se ha desarrollado el interés por las técnicas basadas en wavelets, también se ha desarrollado un importante trabajo teórico para describir algoritmos de estimación óptima de señales en un marco multicanal, como en [37] y [50]. Estos desarrollos teóricos han dado lugar a trabajos en estimación no estacionaria de parámetros de señales, estimación de movimiento, modelización de texturas y segmentación. La teoría estadística de procesos estocásticos multiescala puede llevar a una forma óptima de ver el comportamiento del escalado wavelet o de los coeficientes de detalle conforme evolu-

cionan con la escala. Debemos prestar atención a esta idea en el desarrollo de nuevos enfoques de restauración de imágenes en el dominio wavelet.

Junto a la restauración de imágenes basada en la descomposición wavelet surge también una extensión de la restauración que consiste en la combinación de imágenes de baja resolución para obtener imágenes de alta resolución.

Aunque es posible obtener imágenes de alta resolución directamente a partir de sistemas ópticos y CCDs (*Charge Coupled Devices*) de alta precisión, es muy frecuente que las limitaciones de costes y hardware hagan que los sistemas de captación de imágenes nos proporcionen diferentes imágenes de baja resolución. Además, existe un límite inferior en cuanto al tamaño que puede tener cada CCD, debido a la presencia de ruido electrónico ([2]) y al hecho de que la relación señal-ruido asociada es proporcional al tamaño del detector ([140]).

Las imágenes de baja resolución son frecuentes en muchas aplicaciones de procesamiento de imágenes, como es el caso de la teledetección, la videovigilancia o la astronomía. Por ejemplo, el sistema óptico del telescopio espacial Hubble, la Wide Field Planetary Camera 2 (WFPC2) está compuesta por cuatro cámaras CCD de  $800 \times 800$  píxeles, una de las cuales, la Planetary Camera (PC), tiene una escala de  $0,046''/\text{pixel}$ , mientras que las otras tres, organizadas alrededor de la PC tienen una escala de  $0,0996''/\text{pixel}$  (véase [48] para más detalles).

En esta memoria vamos a hacer uso del marco general de procesamiento de señales multicanal en el dominio de las frecuencias desarrollado por Katsaggelos *et al.* en [70] y Banham *et al.* en [10] (una formulación que también fue obtenida posteriormente por Bose y Boo en [20] para el problema de alta resolución) para abordar la estimación de imágenes en los problemas de restauración multibanda y alta resolución.

Esta formulación nos permite la conversión de cualquier problema de filtrado lineal espacialmente invariante monocanal en uno multicanal. En la restauración basada en la descomposición wavelet, los canales que vamos a considerar son las subbandas generadas por la descomposición wavelet de la imagen. La ventaja que aporta esta formulación es que las estructuras matriciales obtenidas poseen propiedades que nos permitirán desarrollar algoritmos de restauración basados en modelos de imagen multicanal en el

dominio de las frecuencias, sin sacrificar las ventajas computacionales que proporciona la transformada de Fourier, reduciendo además la estacionaridad de nuestros modelos.

En el problema de la obtención de imágenes de alta resolución a partir de observaciones de baja resolución, haremos también uso de las matrices por bloques circulantes de forma que todos los cálculos matriciales involucrados en la estimación de la imagen y los parámetros se puedan realizar en el dominio de Fourier. El enfoque propuesto puede emplearse para asignar los mismos parámetros a todas las imágenes de baja resolución o hacerlos dependientes de las imágenes. También demostraremos que los resultados son extensiones de la estimación por máxima verosimilitud para problemas de restauración monocanal ([109]).

### 1.3. Objetivos y estructura de la memoria

El esquema de esta memoria será el siguiente: en el segundo capítulo describiremos el modelo de formación de imágenes para los dos problemas que hemos planteado, el de la restauración de imágenes y el de la reconstrucción de imágenes de alta resolución a partir de observaciones de baja resolución, distinguiendo entre fuentes de degradación determinísticas (emborronamiento) y estocásticas (ruido) y proporcionando métricas que nos permitan realizar una comparación objetiva de los resultados obtenidos. Describiremos también el paradigma bayesiano, en el que se basan los algoritmos de restauración y reconstrucción de imágenes propuestos en esta memoria.

En el tercer capítulo estudiaremos el enfoque sugerido por los trabajos de Belge *et al.* ([13], [14], [15]), en el que se formula un esquema multiescala adaptativo para la restauración de imágenes digitales mediante la formulación de modelos de imagen basados en distribuciones gaussianas generalizadas. Presentaremos nuestras aportaciones a este trabajo, introduciendo modificaciones en el modelo de imagen que nos permitan obtener mejores restauraciones y proponiendo un algoritmo de restauración multibanda con estimación simultánea de los parámetros.

En el cuarto capítulo presentaremos una aproximación a la descomposición multicanal de los modelos autorregresivos empleados en la formulación bayesiana del prob-

lema de la restauración de imágenes, desarrollando algoritmos de restauración en los que se realizará la estimación simultánea de los parámetros y la imagen basándonos en el enfoque jerárquico bayesiano. Parte de los resultados expuestos en este capítulo han sido publicados en [95].

En el capítulo 5 abordaremos el problema de la reconstrucción de imágenes de alta resolución a partir de observaciones de baja resolución, analizando también la estimación de los parámetros desconocidos, para lo que derivaremos un algoritmo para calcular de forma iterativa su estimación por máxima verosimilitud. Observaremos que podemos emplear las mismas herramientas que en el problema de la restauración para realizar los cálculos de forma eficiente y validaremos la metodología sobre imágenes reales. Los resultados aportados en este capítulo han sido aceptados para su publicación en *IEEE Transactions on Image Processing* ([109]).

Por último, extraeremos las conclusiones de esta memoria de investigación y plantearemos futuras líneas de investigación abiertas a partir del trabajo aquí presentado.

Dos apéndices acompañan a la memoria, describiendo las estructuras matriciales empleadas en el filtrado lineal multicanal y la descomposición multicanal de señales y operadores de convolución, en los que se basa el mecanismo de descomposición multibanda proporcionado por la transformada wavelet, que nos permitirá desarrollar algoritmos de restauración eficientes, ya que podremos trabajar simultáneamente en el dominio wavelet y en el dominio de las frecuencias mediante el uso de la Transformada Rápida de Fourier. Este mismo marco de trabajo se aplicará al problema de reconstrucción de imágenes de alta resolución para la formulación del problema y la obtención de algoritmos eficientes de reconstrucción y estimación de los parámetros del modelo.



## Capítulo 2

# Los problemas de la restauración y reconstrucción de imágenes.

## Aproximación bayesiana a su solución

Les miroirs feraient bien de réfléchir un peu plus avant de renvoyer les images.

Jean Cocteau (1889–1963)

### 2.1. Introducción

En este capítulo vamos a estudiar fundamentalmente el modelo de formación de imágenes, un aspecto fundamental ya que, como hemos destacado en el capítulo anterior, la restauración y la reconstrucción de imágenes se caracterizan y distinguen de otras disciplinas, como la mejora de imágenes, precisamente por el uso de modelos de formación, que describen el proceso que da lugar a la imagen observada a partir de las degradaciones de diferente naturaleza sufridas por la imagen original, la que observaríamos en condiciones de captación ideales. Una vez analizado el proceso de formación de las imágenes observadas describiremos brevemente cómo el modelo bayesiano procede a la restauración o la reconstrucción. La descripción de los modelos de imágenes que utiliza el modelo bayesiano se hará en cada capítulo y para cada problema abordado.

La estructura del capítulo es la siguiente: estudiaremos las diferentes fuentes de degradación que dan lugar al proceso de formación de imágenes monocanal que serán descritas en la sección 2.2. En la sección 2.3 describiremos el proceso de formación de imágenes en problemas de reconstrucción de imágenes de alta resolución, en el que se establece la correspondencia entre los píxeles de las imágenes de baja resolución observadas y los de la imagen de alta resolución que se captaría en condiciones ideales. Definiremos también, para este problema, métricas objetivas de la degradación de las imágenes y de la mejora de calidad en las restauraciones obtenidas.

Para terminar, en la sección 2.4 describiremos el paradigma bayesiano, en el que se basan todos los métodos desarrollados en esta memoria.

## 2.2. El modelo de formación en el problema de la restauración de imágenes

Para motivar el estudio de los métodos de restauración de imágenes digitales, es necesario antes comprender el modo en que las imágenes resultan degradadas. Hay numerosas situaciones en las que un sistema de captación de imágenes puede contribuir a la degradación de la calidad de las imágenes adquiridas. Éstas son en su mayoría el resultado de sistemas de enfoque imperfectos, fuentes externas o internas de ruido en el sistema de captación y degradaciones introducidas por el medio de captación.

Debemos recordar que estamos captando una escena tridimensional para obtener como resultado una imagen bidimensional mediante el sistema de captación. Puesto que el sistema de captación nunca es perfecto, se introducirán degradaciones tanto determinísticas como estocásticas en el proceso.

### 2.2.1. Degradaciones determinísticas

Las degradaciones determinísticas introducidas en el proceso de captación de imágenes pueden ser muy complejas por distintas razones. En primer lugar, el sistema de captación 2-D no puede recoger perfectamente todos los fenómenos 3-D que se presen-

tan en la escena, como puede ser la rotación de un objeto u otros efectos geométricos. En segundo lugar, la función de transferencia del sistema de captación puede ser compleja debido a efectos de difracción en los sistemas ópticos empleados, defectos del sistema, turbulencias atmosféricas, o emborronamientos producidos, por ejemplo, por el movimiento relativo del objeto con respecto al sistema de captación o el desenfoque de la cámara. Sin embargo, el efecto de estas imperfecciones puede considerarse normalmente como una reducción del ancho de banda (o emborronamiento) de la escena captada. Es más, la severidad de la reducción del ancho de banda puede variar en función de las coordenadas de la imagen (emborronamiento espacialmente variante).

Además de todo esto, todo tipo de fenómenos no lineales debidos a la respuesta del sensor pueden degradar adicionalmente la imagen captada. En algunos casos se pueden aproximar por una respuesta lineal. Por ejemplo, el comportamiento logarítmico de un medio fotográfico se hace lineal cuando la imagen es de bajo contraste. Si esta linealización no es posible, hay dos formas de tratar la no linealidad. La forma más elegante matemáticamente, sin duda, es incorporar la respuesta no lineal al modelo de formación de imágenes. Desgraciadamente, un modelo así da lugar a algoritmos de restauración demasiado complejos. Un segundo enfoque, más práctico, supone que se puede aplicar primero la respuesta inversa del sensor a la imagen observada antes de realizar ningún procesamiento sobre ella. Aunque este tratamiento de las no linealidades demuestra no estar falto de defectos, se ha comprobado que da buenos resultados en la práctica.

Según la discusión anterior, podemos justificar el restringir la modelización del sistema de formación de imágenes al efecto dominante del emborronamiento. Todo el proceso se convierte entonces en un sistema lineal caracterizado por una (*psf*). La imagen observada viene dada por la siguiente integral bidimensional:

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y; s, t) f(s, t) ds dt. \quad (2.1)$$

Puesto que tanto la imagen original,  $f(x, y)$ , como la imagen observada,  $g(x, y)$ , representan distribuciones de intensidades reales y sólo toman valores no negativos,  $h(x, y; s, t)$  también debe ser real y no negativa.

El modelo representado en (2.1) complica el problema de la restauración de imágenes debido a que la posibilidad de tener una *psf* diferente en cada coordenada  $(s, t)$  resulta sumamente onerosa desde el punto de vista computacional. Además, es bastante poco realista suponer que se podría estimar una *psf* diferente para cada posición de la imagen debido a la falta de información suficiente para el proceso de estimación de la misma. Por lo tanto, podemos suponer que la *psf* del proceso de formación de imágenes es espacialmente invariante, teniendo entonces:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x-s, y-t) f(s, t) ds dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(s, t) f(x-s, y-t) ds dt \\ &= h(x, y) * f(x, y), \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde  $*$  representa el operador de convolución bidimensional.

Para realizar la restauración de imágenes digitales necesitaremos el equivalente discreto de (2.2). Para ello, se realiza un muestreo de la imagen sobre un soporte finito, dando lugar a la siguiente formulación:

$$g(i, j) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} h(m, n) f(i-m, j-n), \quad (2.3)$$

donde  $M$  y  $N$  son el número de filas y columnas de la imagen.

Podemos obtener una notación más sencilla realizando la ordenación lexicográfica por filas de las imágenes y ubicando los elementos resultantes en un vector, lo que da lugar a:

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}, \quad (2.4)$$

donde  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  son vectores columna ordenados lexicográficamente de tamaño  $MN \times 1$ . Si suponemos una convolución circular en (2.3), la matriz de emborronamiento  $\mathbf{H}$  (de tamaño  $MN \times MN$ ) tiene estructura circulante por bloques.

La ventaja de tener una convolución circular en (2.3) es que los autovalores y autovectores de  $\mathbf{H}$  vienen dados por los coeficientes de la transformada de Fourier discreta de  $h(m, n)$  y las funciones base de Fourier discretas, respectivamente. Por lo tanto, podemos plantear una formulación alternativa de (2.3) y (2.4) a través del siguiente modelo

en el dominio de las frecuencias:

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v), \quad (2.5)$$

donde empleamos las mayúsculas para denotar muestras en el dominio de Fourier y  $u$  y  $v$  son las variables frecuenciales horizontal y vertical, respectivamente.

Estudiemos ahora las *psf* más comúnmente encontradas en los distintos problemas en los que se aplica la restauración de imágenes.

Una *psf* no puede tomar valores arbitrarios. En el modelo de observación discutido anteriormente hemos concluido que la imagen original y la observada son reales y no negativas debido a las características físicas del proceso de formación de imágenes subyacente. En consecuencia, las *psf* deberán ser también reales y no negativas.

Además de ello, debemos tener en cuenta que las imperfecciones de un sistema de captación de imágenes actúan normalmente como operaciones pasivas sobre los datos, es decir, no absorben ni generan energía. En consecuencia, toda la energía que surge de un punto de la imagen original debería preservarse, dando lugar a la siguiente condición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(s, t) ds dt = 1, 0, \quad (2.6)$$

lo que en el ámbito discreto se traduce en

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} h(m, n) = 1, 0. \quad (2.7)$$

### 2.2.1.1. Emborronamiento por movimiento lineal

Se pueden distinguir muchos tipos de emborronamiento por movimiento debidos al movimiento relativo entre el dispositivo de captación y el objeto. Este movimiento puede ser en forma de traslación, rotación o por un repentino cambio de escala, o cualquier combinación de estas causas. Aquí sólo vamos a estudiar el caso de la traslación.

Cuando el objeto se traslada a velocidad constante,  $V$ , bajo un ángulo dado,  $\phi$  durante el intervalo de exposición  $[0, T]$ , la distorsión es unidimensional. Denotando por

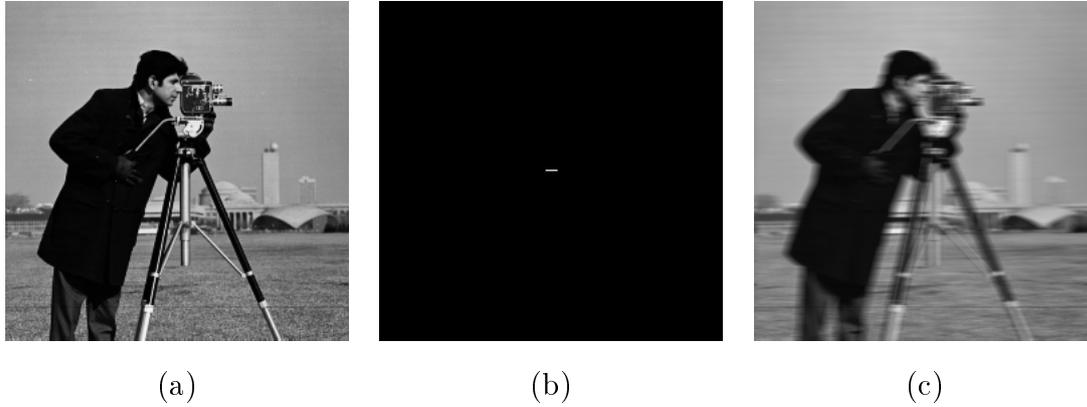


Figura 2.1: (a) Imagen *cameraman* original. (b) Emborronamiento por movimiento lineal de 9 píxeles. (c) Imagen emborronada.

$L = VT$  la “longitud del movimiento”, la *psf* viene dada por ([74]):

$$h(i, j; L, \phi) = \begin{cases} \frac{1}{L}, & \text{si } \sqrt{i^2 + j^2} \leq L/2 \text{ y } i/j = -\tan \phi \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}. \quad (2.8)$$

En este caso, la *psf* es espacialmente invariante, aunque también se puede dar el caso en que sólo una parte de la imagen (típicamente un único objeto de la escena) esté sometida al movimiento de traslación, en cuyo caso la distorsión general será obviamente espacialmente variante.

#### 2.2.1.2. Emborronamiento por desenfoque uniforme

Cuando una escena tridimensional es captada mediante una cámara en un plano bidimensional, algunas partes de la escena se encuentran en el foco, mientras que otras pueden no encontrarse en él. Si la apertura de la cámara es circular, la imagen correspondiente a cualquier fuente puntual será un pequeño disco denominado *círculo de confusión*. El grado de desenfoque (diámetro del círculo de confusión) dependerá de la longitud focal, de la apertura de la lente y de la distancia entre la cámara y el objeto.

Si el grado de desenfoque es grande en relación a las longitudes de onda consideradas, se puede emplear una aproximación geométrica que da lugar a una distribución de intensidad uniforme dentro del círculo de confusión. La *psf* de este emborronamiento

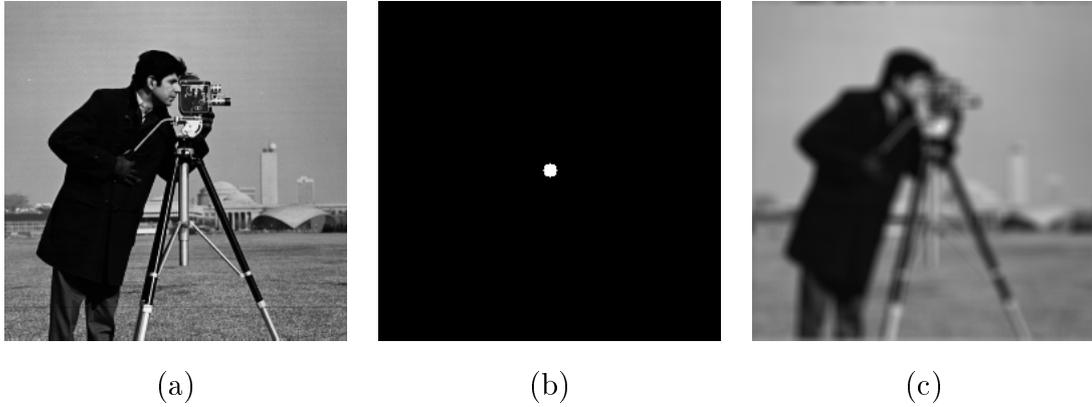


Figura 2.2: (a) Imagen *cameraman* original. (b) Emborronamiento por desenfoque uniforme de radio 5 píxeles. (c) Imagen emborronada.

por desenfoque uniforme con radio  $R$  viene dada por ([74]):

$$h(i, j; R) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & \text{si } \sqrt{i^2 + j^2} \leq R \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} . \quad (2.9)$$

### 2.2.1.3. Emborronamiento uniforme bidimensional

Ésta es una forma severa de degradación por emborronamiento que aproxima el emborronamiento por desenfoque y se emplea en un gran número de simulaciones. Su expresión es ([8]):

$$h(i, j) = \begin{cases} \frac{1}{L^2}, & \text{si } -\frac{L}{2} \leq i, j \leq \frac{L}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} . \quad (2.10)$$

### 2.2.1.4. Emborronamiento por turbulencia atmosférica

El emborronamiento atmosférico se produce en teledetección y astronomía debido al cambio en las condiciones de refracción de la atmósfera terrestre. Debido a que el emborronamiento producido depende de múltiples factores como la temperatura, el tiempo de exposición o las condiciones meteorológicas, no podemos conocer una expresión analítica exacta que describa la forma de la *psf* ([107]). Sin embargo, estudios

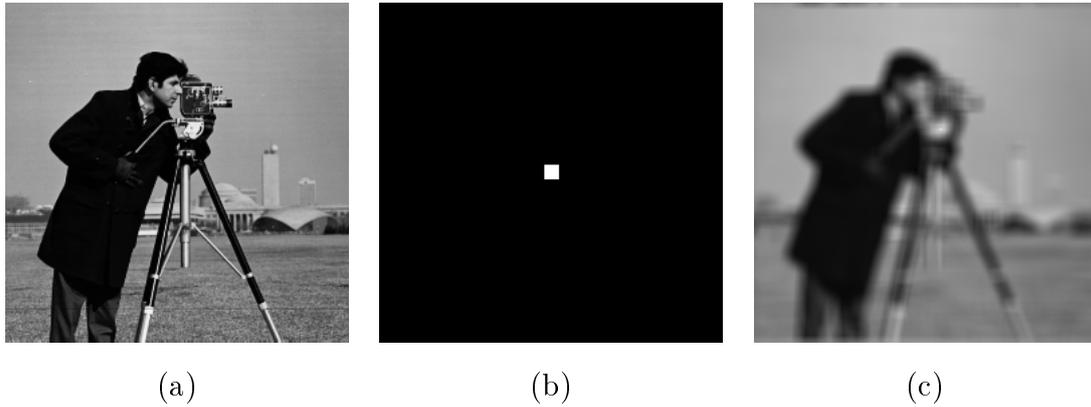


Figura 2.3: (a) Imagen *cameraman* original. (b) Emborronamiento uniforme de  $11 \times 11$  píxeles. (c) Imagen emborronada.

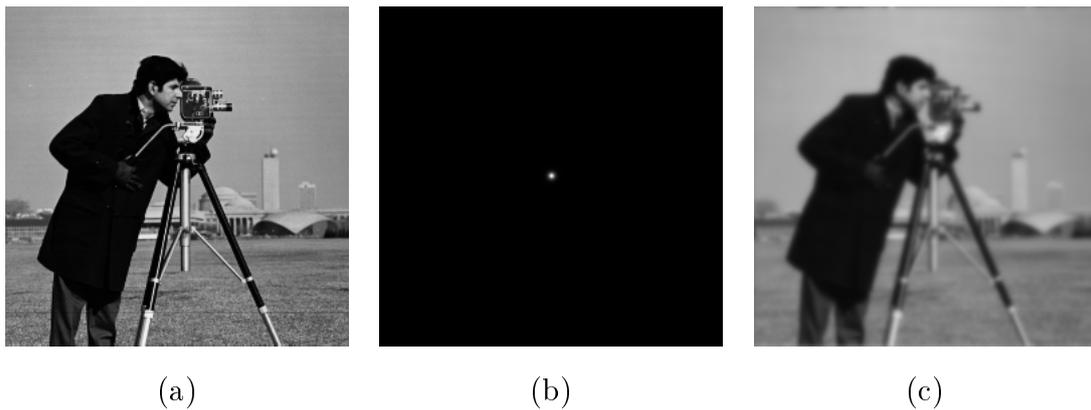


Figura 2.4: (a) Imagen *cameraman* original. (b) Emborronamiento por turbulencia atmosférica con  $R = 3,5$  y  $\beta = 3$ . (c) Imagen emborronada.

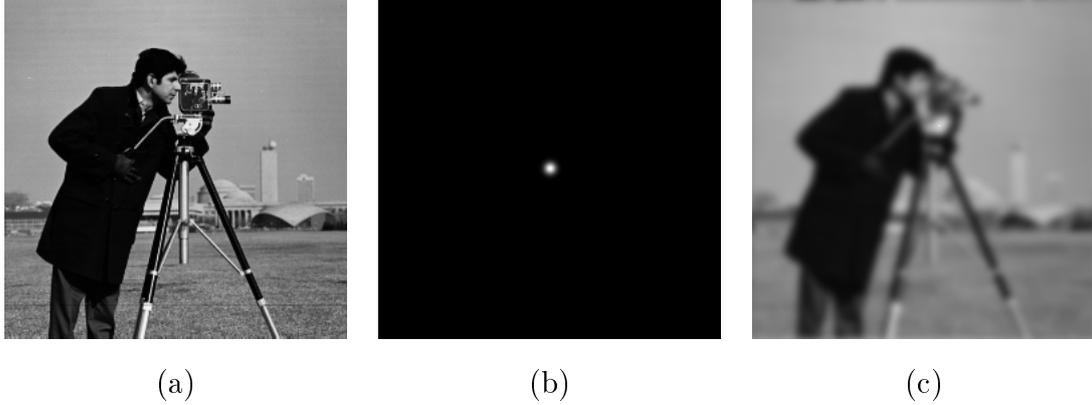


Figura 2.5: (a) Imagen *cameraman* original. (b) Emborronamiento gaussiano con  $\sigma = 3$ . (c) Imagen emborronada.

previos ([28], [108]) han sugerido una aproximación radialmente simétrica de la forma:

$$h(r) = \frac{\beta/\pi R^2}{\left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^\beta} \propto \left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{-\beta}, \quad (2.11)$$

donde  $r$  es la distancia de la fuente al píxel receptor,  $R \approx 3,5$  y  $\beta \approx 3$ . Estos parámetros se pueden estimar a partir de fuentes puntuales (estrellas) que contenga la imagen ([94]).

### 2.2.1.5. Emborronamiento gaussiano

Algunas fuentes ([8], [74]) aproximan el emborronamiento por turbulencia atmosférica mediante una función gaussiana:

$$h(i, j) = C \exp \left\{ -\frac{i^2 + j^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (2.12)$$

Esta aproximación se puede emplear para exposiciones prolongadas, algo frecuente en observaciones astronómicas.  $C$  es una constante de normalización para asegurar que el emborronamiento tiene volumen unidad y  $\sigma$  determinará la severidad del emborronamiento.

### 2.2.1.6. Emborronamiento por dispersión

Las imágenes de rayos X muestran la distinta cantidad de radiación absorbida por el objeto que está siendo irradiado. Sin embargo, parte de la emisión también resulta

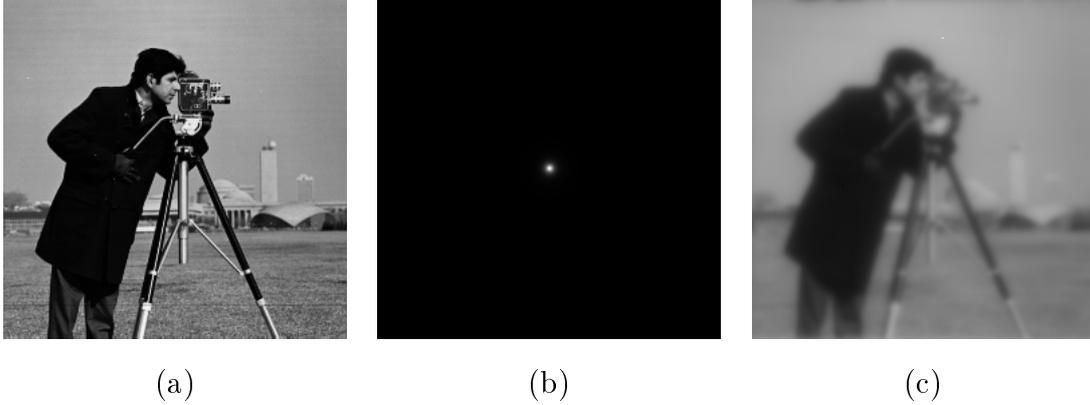


Figura 2.6: (a) Imagen *cameraman* original. (b) Emborronamiento por dispersión con  $\beta = 3$ . (c) Imagen emborronada.

dispersada de su camino de incidencia, dando lugar a una distribución de radiación alrededor de un punto. Hay muchos factores que intervienen en la *psf* resultante de esta dispersión, aunque para los rangos de energía empleados en diagnóstico médico ésta se puede describir como ([74]):

$$h(i, j) = \frac{1}{(\beta^2 + (i^2 + j^2))^{3/2}}, \quad (2.13)$$

donde  $\beta$  determina la severidad del emborronamiento.

### 2.2.2. Degradaciones estocásticas

Además de las distorsiones determinísticas descritas en la sección anterior, las imágenes captadas resultan afectadas por degradaciones estocásticas, normalmente denominadas *ruido de observación*. Éste puede originarse por el medio de transmisión, el proceso de captación, la cuantificación de los datos, o por cualquier combinación de estos fenómenos.

En esta memoria vamos a modelizar el ruido como un proceso gaussiano blanco aditivo de media cero con varianza  $\sigma_n^2$ , que está estadísticamente incorrelado con las imágenes.

$$\mathbf{n} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2 I_{MN}), \quad (2.14)$$

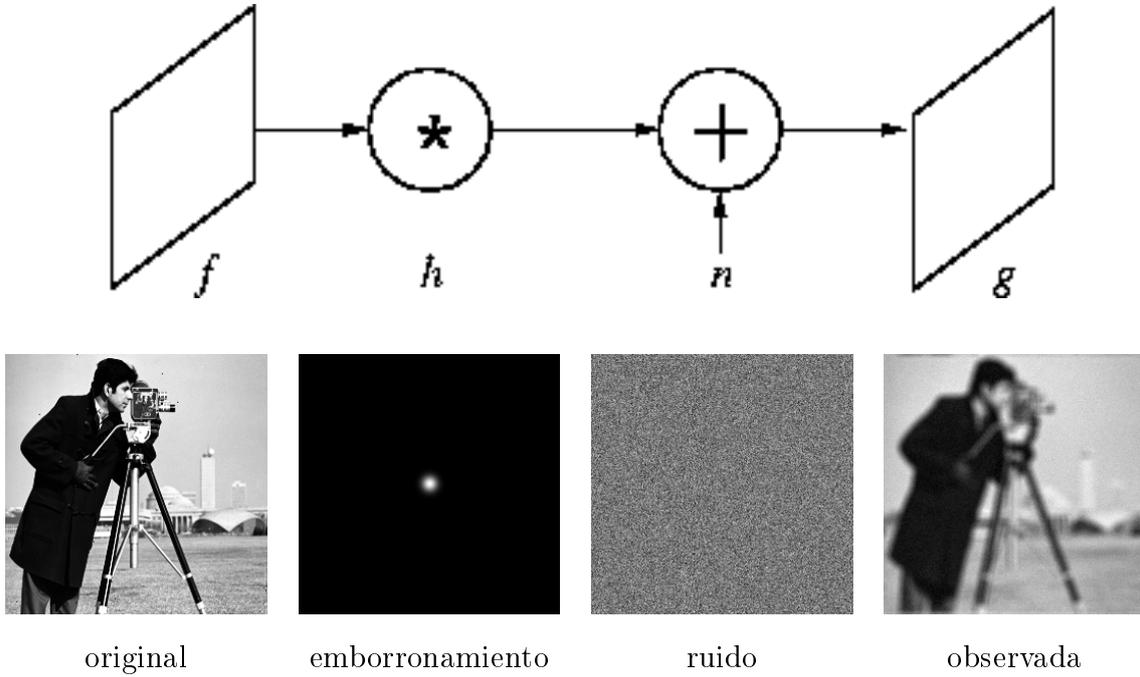


Figura 2.7: Modelo de formación de imágenes

donde  $I_{MN}$  es la matriz identidad de tamaño  $MN \times MN$ .

Esto supone una simplificación, ya que algunos tipos de ruido no están incorrelados con la entrada e incluso pueden ser no aditivos. Sin embargo, esta simplificación conduce a métodos de restauración que se pueden aplicar a un amplio grupo de problemas.

Si notamos la contribución del ruido como  $n(i, j)$ ,  $\mathbf{n}$  ó  $N(u, v)$ , según sigamos cada una de las representaciones consideradas anteriormente, esto es, espacial, matricial o frecuencial, el modelo de formación de imágenes definitivo será:

$$g(i, j) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} h(i-m, j-n) f(i, j) + n(i, j), \quad (2.15)$$

que también podemos expresar como:

$$\mathbf{g} = \mathbf{Hf} + \mathbf{n}, \quad (2.16)$$

en forma matricial y

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v), \quad (2.17)$$

en el dominio de las frecuencias. Podemos ver una representación gráfica de este modelo en la figura 2.7.

### 2.2.3. Medida de la degradación

A las versiones emborronadas de las figuras 2.1 a 2.6 se les ha añadido ruido gaussiano para lograr una relación señal-ruido (*SNR: Signal-to-Noise Ratio*) de 30dB. Esta medida se define en función de la varianza del ruido aditivo,  $\sigma_n^2$ , de la siguiente forma:

$$\text{SNR} = 10 \cdot \log_{10} \left\{ \frac{\frac{1}{N^2} \sum_{m,n} [g(m,n) - \bar{g}(m,n)]^2}{\sigma_n^2} \right\}, \quad (2.18)$$

donde  $g$  es la imagen degradada de acuerdo al modelo descrito en (2.15), (2.16) y (2.17), de tamaño  $M \times N$ , y  $\bar{g}(m,n) = E\{g\}$ . Los efectos del ruido sobre las imágenes emborronadas se pueden observar en la figura 2.8.

## 2.3. El modelo de formación en la reconstrucción de imágenes de alta resolución

Consideremos un grupo de  $L_1 \times L_2$  sensores (un sensor es, por ejemplo, una cámara CCD), donde cada sensor tiene  $N_1 \times N_2$  píxeles y el tamaño de cada elemento de captación es  $T_1 \times T_2$ . Nuestro objetivo es reconstruir una imagen de alta resolución de tamaño  $M_1 \times M_2$ , donde  $M_1 = L_1 \times N_1$  y  $M_2 = L_2 \times N_2$ , a partir de  $L_1 \times L_2$  imágenes observadas de baja resolución. La figura 2.9 muestra una descripción visual de la formulación del problema para el caso en que  $L_1 = L_2 = 2$  y  $N_1 = N_2 = 4$ .

Para mantener la proporción de la imagen reconstruida, consideraremos el caso en el que  $L_1 = L_2 = L$ . Por simplicidad también supondremos que  $L$  es un número par. Cada imagen observada es una versión desplazada y submuestreada de la imagen de alta resolución.

En el caso ideal, los sensores de baja resolución están desplazados unos con respecto a otros en un valor proporcional a  $(T_1/L) \times (T_2/L)$  (obsérvese que si los sensores están desplazados en valores proporcionales a  $T_1 \times T_2$ , el problema de reconstrucción de la

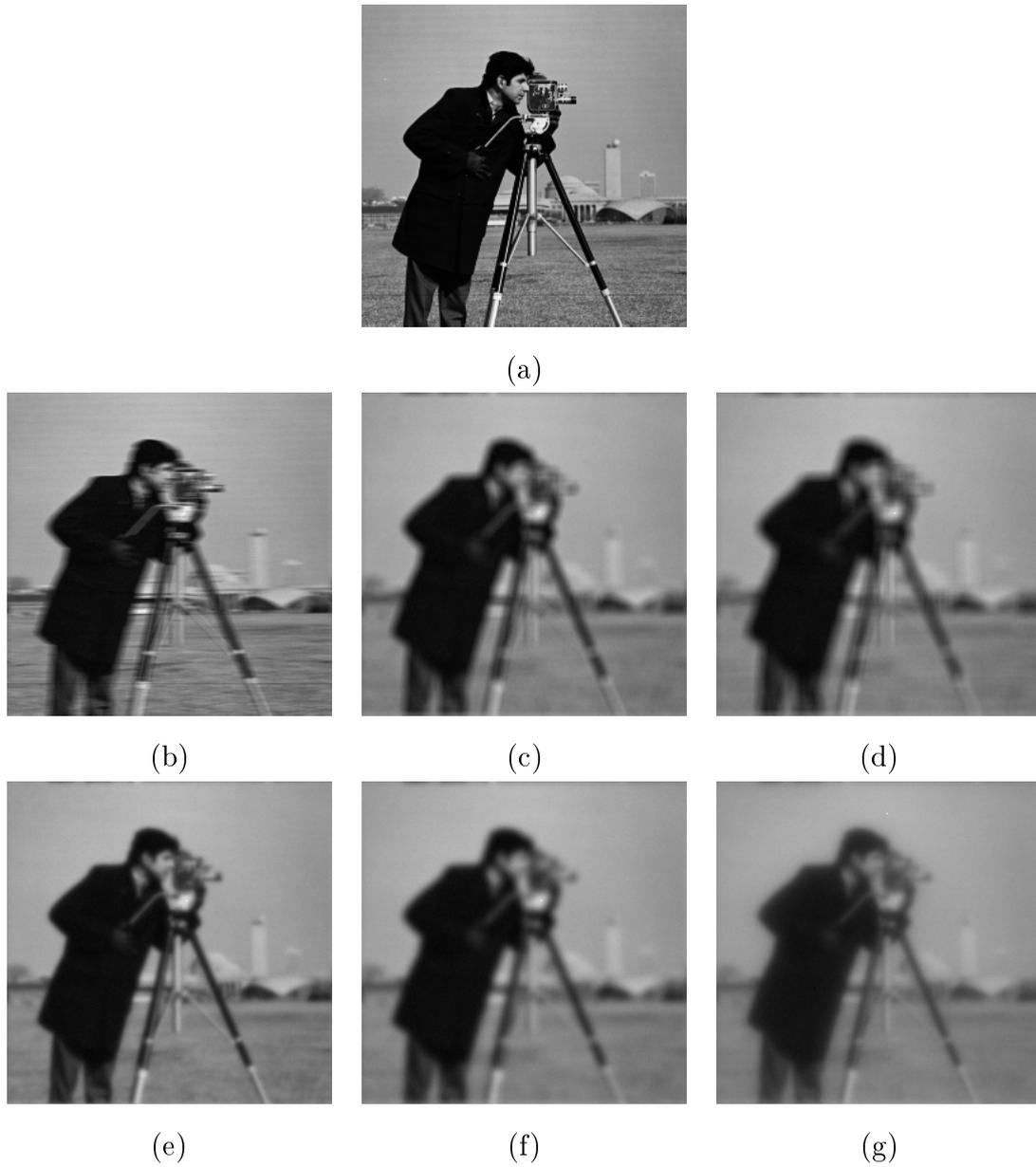


Figura 2.8: (a) Imagen *cameraman* original. (b)-(g) Versión degradada con ruido gaussiano aditivo y emborronamiento por (b) movimiento, (c) desenfoque, (d) uniforme, (e) atmosférico, (f) gaussiano, (g) dispersión.

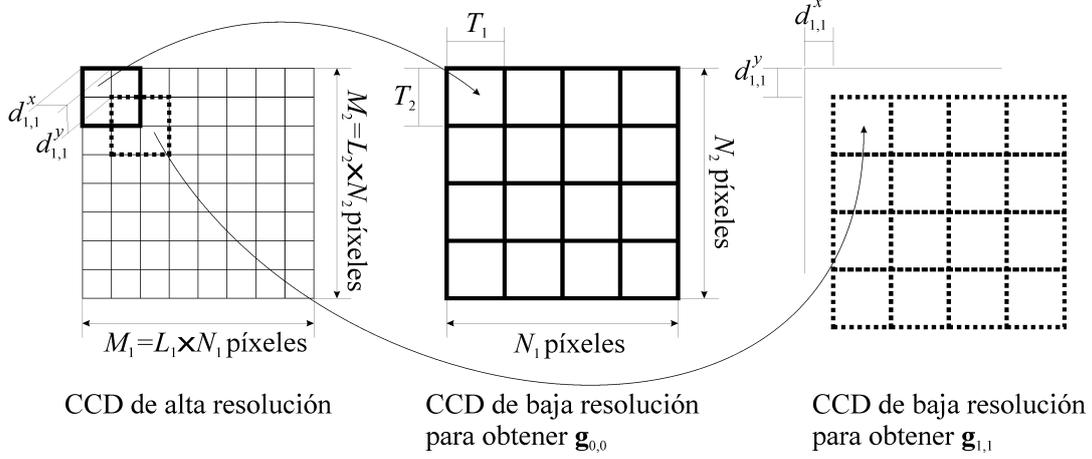


Figura 2.9: Correspondencia entre píxeles de alta y baja resolución.

imagen de alta resolución es singular). Sin embargo, en la práctica puede haber pequeñas perturbaciones alrededor de estas posiciones ideales (véase [133] para una formulación sin perturbaciones). Por lo tanto, los desplazamientos horizontal y vertical  $d_{l_1, l_2}^x$  y  $d_{l_1, l_2}^y$  del  $[l_1, l_2]$ -ésimo sensor con respecto al  $[0, 0]$ -ésimo sensor de referencia vienen dados por (véase la figura. 2.9)

$$d_{l_1, l_2}^x = \frac{T_1}{L} (l_1 + \epsilon_{l_1, l_2}^x) \quad \text{y} \quad d_{l_1, l_2}^y = \frac{T_2}{L} (l_2 + \epsilon_{l_1, l_2}^y), \quad l_1, l_2 = 0, \dots, L-1 \quad (2.19)$$

donde  $\epsilon_{l_1, l_2}^x$  y  $\epsilon_{l_1, l_2}^y$  denotan, respectivamente, los errores de desplazamiento horizontal y vertical. Supondremos que  $|\epsilon_{l_1, l_2}^x| < 1/2$  y  $|\epsilon_{l_1, l_2}^y| < 1/2$  con  $\epsilon_{0,0}^x = \epsilon_{0,0}^y = 0$ . El desplazamiento horizontal y vertical puede suponerse conocido, (véase [20], [113] para más detalles). En [142], [143] y [144] se presenta una aproximación en la que los desplazamientos se suponen desconocidos y se estiman simultáneamente con la imagen de alta resolución.

### 2.3.1. Modelo para obtener las imágenes observadas de baja resolución

El proceso para obtener  $\mathbf{g}_{l_1, l_2}$ , la imagen  $(N_1 \times N_2) \times 1$  de baja resolución observada por el  $(l_1, l_2)$ -ésimo sensor, a partir de  $\mathbf{f}$ , la imagen  $(M_1 \times M_2) \times 1$  de alta resolución,

puede modelizarse como sigue (véase la figura 2.9 para la correspondencia entre los píxeles de las imágenes de alta y baja resolución).

Sea  $\mathbf{H}_{l1,l2}$  una matriz  $(M_1 \times M_2) \times (M_1 \times M_2)$  de integración que representa el modo en que un conjunto de píxeles de la imagen de alta resolución afecta a cada píxel de baja resolución.  $\mathbf{H}_{l1,l2}$  puede tener diferentes formas: en [20] y [113],  $\mathbf{H}_{l1,l2}$  está asociada a la función de emborronamiento

$$h_{l1,l2}(x, y) = h_{l1}^1(x)h_{l2}^2(y), \quad (2.20)$$

con

$$h_l^i(u) = \begin{cases} \frac{1}{L} \left( \frac{1}{2} - \epsilon_l^i \right) & u = -\frac{L}{2} \\ \frac{1}{L} & |u| < \frac{L}{2} \\ \frac{1}{L} \left( \frac{1}{2} + \epsilon_l^i \right) & u = \frac{L}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (2.21)$$

donde  $l \in \{0, \dots, L-1\}$  e  $i = 1, 2$ ; en [126]  $h_l^i$  tiene la forma

$$h_l^i(u) = \begin{cases} \frac{1}{L} & u = -(L-1), \dots, 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (2.22)$$

obsérvese que en este caso,  $h_{l1}^1 = h_{l2}^2$ ,  $\forall i, \epsilon_l^i = 0$ , los errores de desplazamiento normalizados horizontal y vertical de (2.19) verifican que  $\epsilon_{l1,l2}^x = \epsilon_{l1,l2}^y = 0$ , y  $\mathbf{H}_{l1,l2} = \mathbf{H}$ ,  $\forall l1, l2 = 0, \dots, L-1$ .

Sean  $\mathbf{D}_{l1}$  y  $\mathbf{D}_{l2}$  las matrices de submuestreo unidimensionales definidas como

$$\mathbf{D}_{l1} = \mathbf{I}_{N_1} \otimes \mathbf{e}_l^t, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{D}_{l2} = \mathbf{I}_{N_2} \otimes \mathbf{e}_l^t, \quad (2.24)$$

donde  $\mathbf{I}_{N_i}$  es la matriz identidad de tamaño  $N_i \times N_i$ ,  $\mathbf{e}_l$  es el vector unidad de tamaño  $L \times 1$  cuyo elemento distinto de cero se encuentra en la  $l$ -ésima posición,  $\otimes$  denota el operador del producto de Kronecker y  $t$ , el operador de trasposición.

Entonces, para cada sensor, la imagen observada discreta de baja resolución,  $\mathbf{g}_{l1,l2}$  puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{l1,l2} &= \mathbf{D}_{l1,l2} \mathbf{H}_{l1,l2} \mathbf{f} + \mathbf{v}_{l1,l2} \\ &= \mathbf{W}_{l1,l2} \mathbf{f} + \mathbf{v}_{l1,l2}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde  $\mathbf{W}_{l_1, l_2}$  denota la matriz  $(N_1 \times N_2) \times (M_1 \times M_2)$ ,

$$\mathbf{W}_{l_1, l_2} = \mathbf{D}_{l_1, l_2} \mathbf{H}_{l_1, l_2}, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{D}_{l_1, l_2} = \mathbf{D}_{l_1} \otimes \mathbf{D}_{l_2}, \quad (2.27)$$

denota la matriz  $(N_1 \times N_2) \times (M_1 \times M_2)$  bidimensional de submuestreo y  $\mathbf{v}_{l_1, l_2}$  se modeliza como ruido blanco independiente con varianza  $\beta_{l_1, l_2}^{-1}$ . Denotaremos por  $\mathbf{g}$  la suma de las imágenes de baja resolución supermuestreadas, es decir,

$$\mathbf{g} = \sum_{u=0}^{L-1} \sum_{v=0}^{L-1} \mathbf{D}_{u, v}^t \mathbf{g}_{u, v}. \quad (2.28)$$

Dado un vector columna  $(M_1 \times M_2) \times 1$ ,  $\mathbf{u}$ , denotaremos por  $\mathbf{u}_{l_1, l_2}$  el vector columna  $(N_1 \times N_2) \times 1$  dado por

$$\mathbf{u}_{l_1, l_2} = \mathbf{D}_{l_1, l_2} \mathbf{u}. \quad (2.29)$$

Es importante observar la correspondencia existente entre este modelo de formación y el descrito en la sección 2.2. Obsérvese que aquí  $\mathbf{H}_{l_1, l_2}$  juega el mismo papel que  $\mathbf{H}$  en la ecuación (2.16), de la misma forma que podemos ver la equivalencia entre  $\mathbf{v}_{l_1, l_2}$  y  $\mathbf{n}$  en las ecuaciones (2.25) y (2.16), respectivamente.

Aunque en esta memoria sólo estamos considerando el emborronamiento producido por la integración de los píxeles de alta resolución para formar cada píxel de baja resolución, se pueden considerar modelos más generales en los que se tiene en cuenta el emborronamiento producido por el sensor ([40], [79], [91], [148]).

Las figuras 2.10 y 2.11 ilustran el proceso de degradación que hemos descrito en esta sección. La figura 2.10 muestra la imagen original  $256 \times 256$  de alta resolución empleada y en la figura 2.11 se incluyen las dieciséis imágenes de baja resolución  $64 \times 64$  obtenidas mediante la aplicación del proceso de degradación descrito en la ecuación (2.25) con la función de emborronamiento definida en (2.22),  $L_1=L_2=4$  y añadiendo ruido gaussiano con la misma varianza, esto es,  $\beta_{l_1, l_2}^{-1} = \beta^{-1} = 1,44$ ,  $\forall l_1, l_2$ , a cada una de las imágenes de baja resolución, obteniendo así una SNR de aproximadamente 30dB.

El modelo descrito en esta sección contempla también la posibilidad de que cada una de las imágenes observadas de baja resolución se vea afectada por ruido con diferentes



Figura 2.10: Imagen original  $256 \times 256$  de alta resolución.

varianzas. En la figura 2.13 se muestran las imágenes de baja resolución obtenidas mediante emborronamiento y submuestreo de la imagen original  $256 \times 256$  de la figura 2.12 siguiendo el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior, pero añadiendo a cada una de las imágenes  $64 \times 64$  de baja resolución ruido gaussiano con diferentes varianzas para obtener SNRs de 20, 30 ó 40dB. Las varianzas empleadas se muestran en la tabla 2.1.

Tabla 2.1: SNRs y varianzas del ruido para las imágenes de baja resolución de la figura 2.13.

SNR / $\beta_{l_1, l_2}^{-1}$	0	1	2	3
0	20dB / 38.94	30dB / 4.00	40dB / 0.39	20dB / 40.63
1	30dB / 3.90	20dB / 38.72	40dB / 0.39	30dB / 3.86
2	40dB / 0.39	20dB / 41.03	30dB / 3.88	40dB / 0.40
3	20dB / 39.73	40dB / 0.39	30dB / 3.93	20dB / 39.20

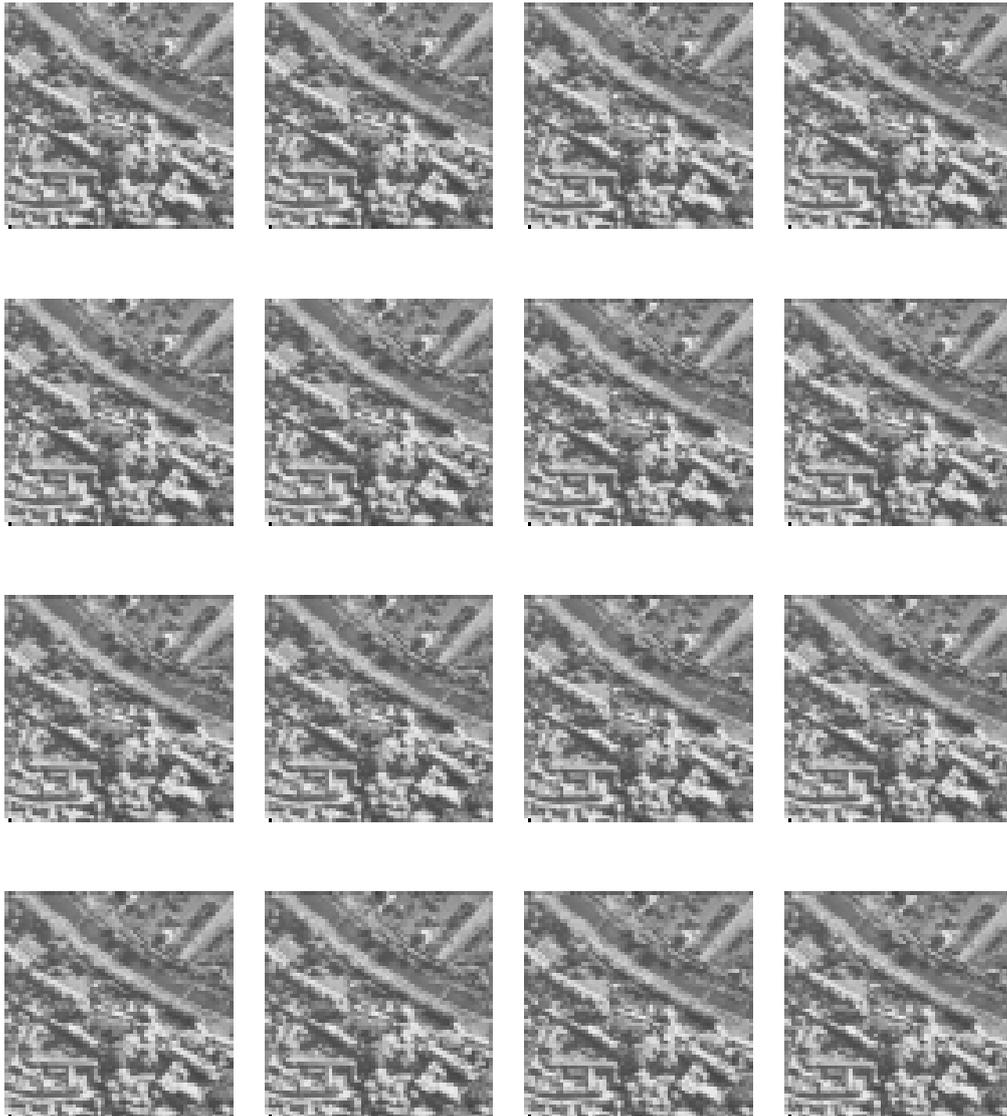


Figura 2.11: Imágenes de baja resolución  $64 \times 64$  observadas según el modelo de degradación descrito a partir de la imagen original de la figura 2.10.

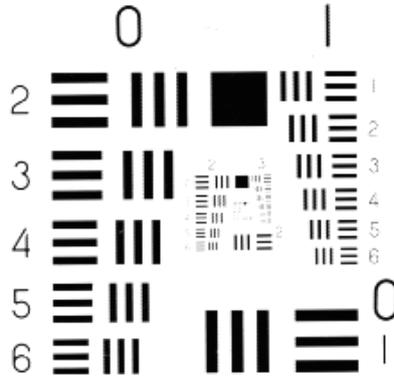


Figura 2.12: Imagen original  $256 \times 256$  de alta resolución.

### 2.3.2. Medida de la calidad de las restauraciones y reconstrucciones

Con el objeto de comprobar objetivamente la calidad de los resultados obtenidos por los algoritmos de restauración y reconstrucción presentados en esta memoria usaremos la mejora en la relación señal-ruido (*ISNR: Improvement in Signal-to-Noise Ratio*). Esta métrica viene dada por:

$$\text{ISNR} = 10 \cdot \log_{10} \left\{ \frac{\sum_{m,n} [f(m,n) - g(m,n)]^2}{\sum_{m,n} [f(m,n) - \hat{f}(m,n)]^2} \right\}, \quad (2.30)$$

donde  $f(m,n)$ ,  $g(m,n)$  son, respectivamente, los valores de intensidad de las imágenes original y degradada en la posición  $(m,n)$  y  $\hat{f}(m,n)$  es el correspondiente valor restaurado. En el problema de la reconstrucción de imágenes de alta resolución hay que observar que hemos notado por  $\mathbf{g}$  la suma de las imágenes de baja resolución supermuestreadas, tal como se ha definido en la ecuación (2.28).

Es importante destacar que, aunque las métricas de error cuadrático medio no siempre reflejan las propiedades del sistema visual humano, sí sirven para proporcionar un sistema objetivo con el que poder comparar los resultados obtenidos por las diferentes técnicas. Sin embargo, en todos los ejemplos que presentaremos, será importante considerar el comportamiento de los distintos algoritmos desde el punto de vista de la

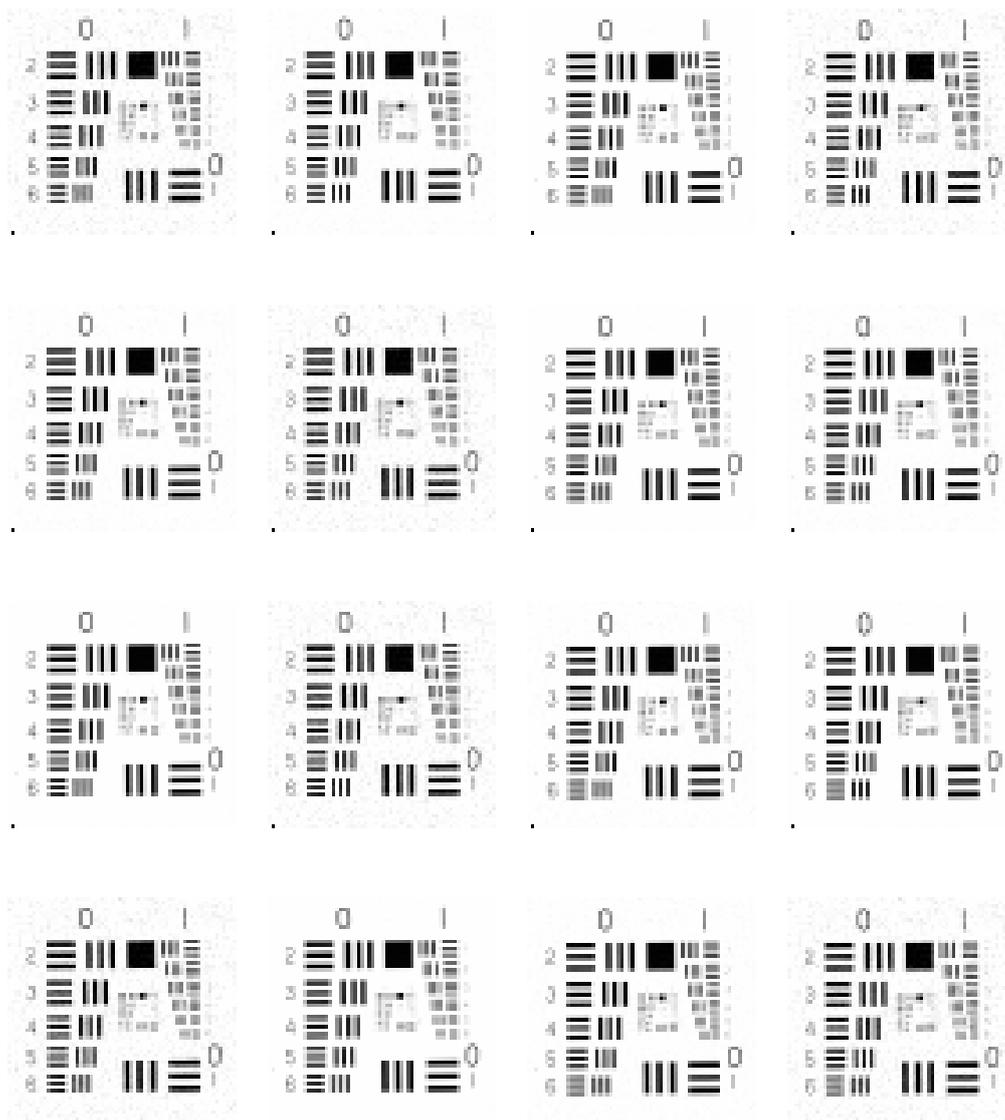


Figura 2.13: Imágenes de baja resolución  $64 \times 64$  observadas según el modelo de degradación descrito a partir de la imagen original de la figura 2.12.

preservación de fronteras, lo que puede ser un indicador clave de la mejora de calidad en las comparaciones subjetivas de los distintos algoritmos presentados.

## 2.4. El paradigma jerárquico bayesiano

El paradigma bayesiano jerárquico ha venido empleándose en muchas áreas relacionadas con el análisis de imágenes. Algunos ejemplos son la construcción de árboles de clasificación ([25]), la construcción ([26], [39]) o el refinamiento de redes de probabilidad ([137]) y las redes neuronales con propagación hacia atrás ([27], [85]). Este paradigma también se ha aplicado a problemas de interpolación ([57], [84]), reconstrucción de imágenes tomográficas ([78], [80], [81]), reconstrucción de imágenes comprimidas ([88], [89]) y a problemas de restauración ([93], [96]), incluso cuando el emborronamiento presente en la imagen sólo era parcialmente conocido ([49]).

La modelización bayesiana de un problema se basa en una aproximación estadística y está relacionado con la teoría de la decisión en presencia de conocimiento estadístico que pueda arrojar luz sobre algunas incertidumbres involucradas en los problemas de decisión. La estadística clásica se dirige hacia el uso de la información proveniente de los datos obtenidos de investigación estadística para hacer inferencias sobre datos desconocidos. La teoría de la decisión, por otra parte, intenta combinar la información de los datos con otros aspectos relevantes del problema para tomar decisiones mejores. Otro punto de vista del mismo problema, desde la teoría de la regularización, se puede estudiar en [62], [63], [67] y [96]. En [64] se recogen también otros enfoques.

El enfoque conocido como Inferencia Bayesiana se puede distinguir de otros enfoques estadísticos por el uso de información a priori sobre las imágenes que estamos tratando. Esta información a priori suele contener información espacial sobre la distribución de las intensidades de luz de los objetos de la imagen. Este enfoque ha tenido una amplia aplicación en el campo de la restauración de imágenes en Astronomía (véanse, por ejemplo, [1], [94], [98], [102], [103] y [108], y las referencias allí citadas), donde las imágenes se consideran compuestas de fuentes puntuales (estrellas) y objetos cuya luminosidad varía suavemente (planetas y galaxias), aunque ha demostrado su efectividad en otras

aplicaciones de la restauración de imágenes (véanse, por ejemplo, [90], [100] y [104]).

### 2.4.1. Descripción del paradigma bayesiano

Al seguir el paradigma bayesiano, distinguiremos entre  $\mathbf{f}$ , la “verdadera” imagen, la que se habría observado bajo condiciones de captación ideales, y  $\mathbf{g}$ , la imagen observada, ya descritas en las secciones 2.2 y 2.3 para los dos problemas que estamos considerando en esta memoria.

El objetivo es reconstruir  $\mathbf{f}$ , la imagen original, a partir de  $\mathbf{g}$ , la imagen observada. Los métodos bayesianos parten de una distribución a priori, una distribución de probabilidad sobre las imágenes,  $p(\mathbf{f}|\alpha)$ . En esta distribución a priori es donde se incorpora información sobre la estructura esperada en una imagen. También resulta necesario especificar  $p(\mathbf{g}|\mathbf{f}, \beta)$ , la distribución de probabilidad de las imágenes observadas,  $\mathbf{g}$ , si  $\mathbf{f}$  fuera la “verdadera” imagen. Tanto la distribución a priori como la condicionada dependen de una serie de parámetros,  $\alpha$  y  $\beta$ , o vectores de hiperparámetros (en cuyo caso los notaremos  $\underline{\alpha}$  y  $\underline{\beta}$ ), que habrá que fijar o estimar a partir de los datos.

El paradigma jerárquico bayesiano combina la información proveniente de los datos de la imagen observada por el sistema de captación con la información a priori para construir la distribución a posteriori de  $\mathbf{f}$  dada  $\mathbf{g}$ ,  $p(\mathbf{f}|\mathbf{g}, \alpha, \beta)$ , a partir de la cual se toman decisiones y se desarrollan inferencias.

El paradigma jerárquico bayesiano aplicado al ámbito de la restauración y la reconstrucción de imágenes digitales tiene, al menos, dos fases. En la primera, se emplea el conocimiento sobre las características del ruido y sobre el comportamiento estructural de la imagen estimada para formar  $p(\mathbf{g}|\mathbf{f}, \beta)$  y  $p(\mathbf{f}|\alpha)$ , respectivamente. En la segunda fase, el paradigma jerárquico bayesiano establece una distribución a priori sobre los parámetros desconocidos,  $p(\alpha)$  y  $p(\beta)$ , donde se incluye nuestro conocimiento subjetivo sobre el posible valor de esos parámetros. Cuando se usa este paradigma, a los parámetros desconocidos se les suele denominar *hiperparámetros*.

Aunque a veces es posible conocer relaciones entre los hiperparámetros, el modelo

que estudiaremos en esta memoria usa una probabilidad global definida como

$$p(\alpha, \beta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) = p(\alpha)p(\beta)p(\mathbf{f}|\alpha)p(\mathbf{g}|\mathbf{f}, \beta).$$

## 2.4.2. Soluciones al problema de la restauración

Una vez que se definen los elementos necesarios para realizar el análisis basado en el paradigma jerárquico bayesiano  $p(\alpha, \beta, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ , podemos realizar este análisis de dos formas diferentes. Una de ellas es la denominada análisis basado en la moda a posteriori (MAP) y la otra, el análisis basado en la evidencia. Estudiemos estos dos enfoques con detalle.

### 2.4.2.1. Análisis basado en la moda a posteriori

Este análisis, sugerido en [27], [93], [141] y [152], realiza la estimación de la imagen y los hiperparámetros de forma simultánea integrando  $p(\alpha, \beta, \mathbf{f}, \mathbf{g})$  sobre los hiperparámetros,  $\alpha$  y  $\beta$ , para obtener la verdadera verosimilitud y maximizando esta verosimilitud en  $\mathbf{f}$ . El proceso de estimación de la imagen,  $\mathbf{f}$ , y de los hiperparámetros,  $\alpha$  y  $\beta$ , es como se describe a continuación:

- Estimación de la imagen:

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \max_{\mathbf{f}} p(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \arg \max_{\mathbf{f}} \int_{\alpha} \int_{\beta} p(\alpha, \beta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) d\alpha d\beta.$$

- Estimación de los hiperparámetros:

$$\hat{\alpha}, \hat{\beta} = \arg \max_{\alpha, \beta} p(\alpha, \beta | \hat{\mathbf{f}}, \mathbf{g})$$

Nótese que el análisis basado en el MAP no se preocupa realmente de la estimación de los hiperparámetros  $\alpha$  y  $\beta$  y el primer paso del proceso puede entenderse realmente como un paso intermedio necesario para el cálculo de  $\hat{\mathbf{f}}$ .

### 2.4.2.2. Análisis basado en la evidencia

En este enfoque se integra  $p(\alpha, \beta, \mathbf{f}, \mathbf{g})$  en  $\mathbf{f}$  para obtener la evidencia  $p(\alpha, \beta | \mathbf{g})$ , que se maximiza sobre los hiperparámetros. La estimación de la imagen se obtiene empleando los hiperparámetros estimados. El proceso de estimación es ahora el siguiente:

- Estimación de los hiperparámetros:

$$\hat{\alpha}, \hat{\beta} = \arg \max_{\alpha, \beta} p(\alpha, \beta | \mathbf{g}) = \arg \max_{\alpha, \beta} \int_{\mathbf{f}} p(\alpha, \beta, \mathbf{f}, \mathbf{g}) d\mathbf{f}.$$

- Restauración de la imagen:

$$\mathbf{f}^{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} = \arg \max_{\mathbf{f}} p(\mathbf{f} | \mathbf{g}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}).$$

Es interesante observar que si usamos distribuciones impropias para los hiperparámetros, el primer paso de estimación de parámetros equivale a seleccionar  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$  como las estimaciones por máxima verosimilitud de  $\alpha$  y  $\beta$  a partir de  $p(\mathbf{g} | \alpha, \beta)$ .

En [96], Molina *et al.* realizan un estudio en profundidad comparando ambos enfoques, en el que se concluye que el análisis basado en la evidencia proporciona mejores resultados que el análisis basado en la moda a posteriori en problemas de restauración de imágenes. Por este motivo, en esta memoria seguiremos el análisis basado en la evidencia.

## Capítulo 3

# Restauración de imágenes basada en wavelets usando modelos de Gauss-Markov Generalizados

Le diré el problema que plantea el poder científico que están utilizando aquí: no les costó ninguna disciplina adquirirlo. Leyeron lo que hicieron otros y dieron el paso siguiente. No adquirieron ese conocimiento, así que no asumen ninguna responsabilidad por ello. Se alzaron sobre los hombros de genios para conseguir algo lo antes posible y sin saber siquiera lo que tenían. No lo patentaron, lo envolvieron, lo metieron en una caja, ¡y ahora lo están vendiendo!

Dr. Malcolm, en *Jurassic Park*, de Steven Spielberg

### 3.1. Introducción

En este capítulo vamos a estudiar el uso de los Campos Aleatorios de Gauss-Markov Generalizados como modelo a priori de las subbandas de las imágenes en problemas de restauración de imágenes digitales.

Este modelo nos llevará a una descomposición subbanda de la imagen y abordaremos la estimación de la imagen y de los parámetros. Para ello utilizaremos el modelo de imagen GGMRF subbanda empleado inicialmente por Belge *et al.* en [14] y [15] en un

intento por desarrollar un esquema de regularización con preservación de fronteras para problemas de restauración de imágenes digitales. El equivalente modelo monocanal fue propuesto por Bouman *et al.* en [22] para problemas de reconstrucción de imágenes SPECT.

El objetivo en la descomposición subbanda es poder adaptar los parámetros del modelo a las características estructurales locales de la imagen subyacente al problema, incluyendo la posibilidad de modificar las características de orientación y escala de la imagen a estimar manteniendo a la vez la preservación de fronteras del regularizador.

Con esta intención, los autores proponen un modelo de imagen multiescala en el que los coeficientes de las diferentes bandas de la transformada wavelet de la imagen se consideran independientemente distribuidos de acuerdo a distribuciones gaussianas generalizadas, permitiendo establecer los hiperparámetros de la distribución de cada banda de acuerdo a la escala y orientación de las diferentes bandas de la transformada wavelet de la imagen. El motivo por el que se propone este modelo se basa en el hecho de que trabajos anteriores (véase, por ejemplo, [4]) sugieren que estos modelos, cuyas colas tienen un mayor peso que en el caso de la distribución gaussiana, proporcionan una mejor descripción de la distribución estadística de los coeficientes wavelet.

En este capítulo analizaremos cómo la estructura descrita en el capítulo anterior puede aplicarse tanto a la obtención de la restauración de la imagen como a la estimación de los parámetros del modelo.

Podemos encontrar en la literatura muchos tipos de algoritmos de restauración de imágenes espacialmente variantes. Algunos de ellos son los que incorporan las propiedades del sistema visual humano ([3], [65], [66]), los algoritmos recursivos basados en el filtro de Kalman ([125], [153]) y los basados en modelos de Campos Aleatorios de Gauss Markov Compuestos ([36], [55], [61], [90], [98], [101]).

En los últimos años se ha producido un gran desarrollo en el uso de enfoques multi-escala y multicanal para el procesamiento de imágenes, en parte motivado por la enorme actividad originada en el campo de los wavelets (véanse [4], [38], [41], [42], [72], [92], [149], por citar sólo algunas de las referencias más destacadas).

Las fronteras de una imagen proporcionan una parte importante de la información

perceptual, por lo que muchos algoritmos de procesamiento de imágenes prestan especial atención a éstas. En este sentido, podemos ver la transformada wavelet como una herramienta apropiada para manipular e interpretar el comportamiento de las fronteras en una imagen. Esta perspectiva ha conducido a algoritmos de codificación ([87]), mejora ([86], [136], [155]) y reconstrucción de imágenes a partir de proyecciones ([43], [120]).

En esta misma línea también se han desarrollado algoritmos de estimación planteados desde una perspectiva multiescala o multicanal en campos como la estimación de movimiento ([29], [83]), modelización de texturas ([124]) o la fusión de datos ([121]).

Una de las primeras aportaciones en restauración a nivel subbanda se propone en [154], donde se aplica el filtro de Wiener independientemente a cada banda, demostrando que el enfoque subbanda es plenamente viable. Otros trabajos han hecho uso de wavelets biortogonales ([23]). También se han realizado diferentes trabajos sobre el uso de los coeficientes wavelet en la restauración y eliminación de ruido en imágenes. Por ejemplo, en [138] se realiza la estimación MAP de los coeficientes wavelet de una imagen ruidosa para obtener una versión más suave de la misma. La idea de la reducción de coeficientes wavelet se ha aplicado al residuo de cada paso del algoritmo de Richardson-Lucy en [139] y, como paso previo a la deconvolución iterativa, en [138].

Desde la publicación en [70] de un marco de trabajo en el que se desarrolla una formulación matricial de la descomposición subbanda basada en wavelets que permite la conversión de cualquier problema de filtrado lineal espacialmente invariante en uno multicanal sin sacrificar las ventajas computacionales que aporta trabajar en el dominio de las frecuencias, han aparecido diferentes trabajos que reformulan algoritmos clásicos monocanal de manera que sean adaptativos ([11], [12], [17], [76]), o para formular nuevos modelos de imagen que tienen en cuenta las diferentes características de las bandas generadas al descomponer la imagen mediante la transformada wavelet ([14], [77], [150]).

En esta memoria nos basaremos en este marco de trabajo para abordar el problema de la restauración de imágenes desde una perspectiva multibanda. El objetivo es obtener modelos de imagen y algoritmos de forma que podamos adaptar los parámetros que gobiernan el modelo de imagen a las características estructurales de cada una de las

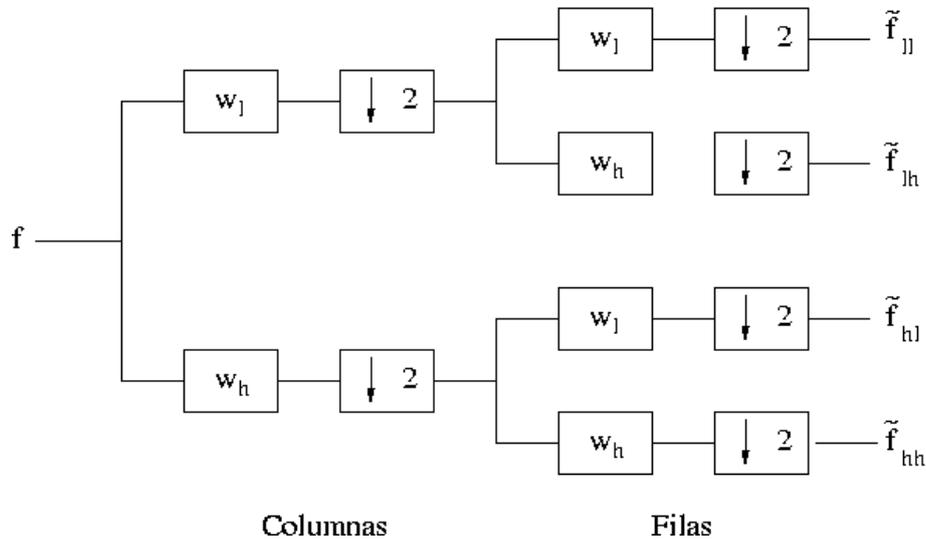


Figura 3.1: Diagrama de la descomposición wavelet de una imagen en cuatro canales.

bandas, desarrollando algoritmos de restauración adaptativos, todo ello sin sacrificar las ventajas computacionales que supone trabajar en el dominio de las frecuencias.

## 3.2. Representación wavelet del problema

Utilizaremos la transformada wavelet de imágenes mediante una representación separable, realizando esta descomposición por medio del filtrado unidimensional de las filas y las columnas de las imágenes a descomponer, como se muestra de modo gráfico en la figura 3.1.

Un nivel de la descomposición wavelet va a generar cuatro subimágenes de tamaño  $M/2 \times N/2$ ,  $\tilde{\mathbf{f}}_{uv}$ ,  $u, v \in \{l, h\}$ .  $\tilde{\mathbf{f}}_{ll}$  hará referencia a los coeficientes de escalado del primer nivel de la transformada wavelet de la imagen. Por su parte,  $\tilde{\mathbf{f}}_{lh}$ ,  $\tilde{\mathbf{f}}_{hl}$  y  $\tilde{\mathbf{f}}_{hh}$  corresponden a los coeficientes wavelet correspondientes a las direcciones horizontal, vertical y diagonal, respectivamente. La figura 3.2 ilustra también el proceso de descomposición aplicado a una imagen.

Como es sabido, podemos obtener una descomposición wavelet multinivel en  $4^i$  canales de la imagen, donde  $i$  indica el número de niveles, aplicando un nivel del esquema de descomposición wavelet descrito anteriormente a los coeficientes de las diferentes

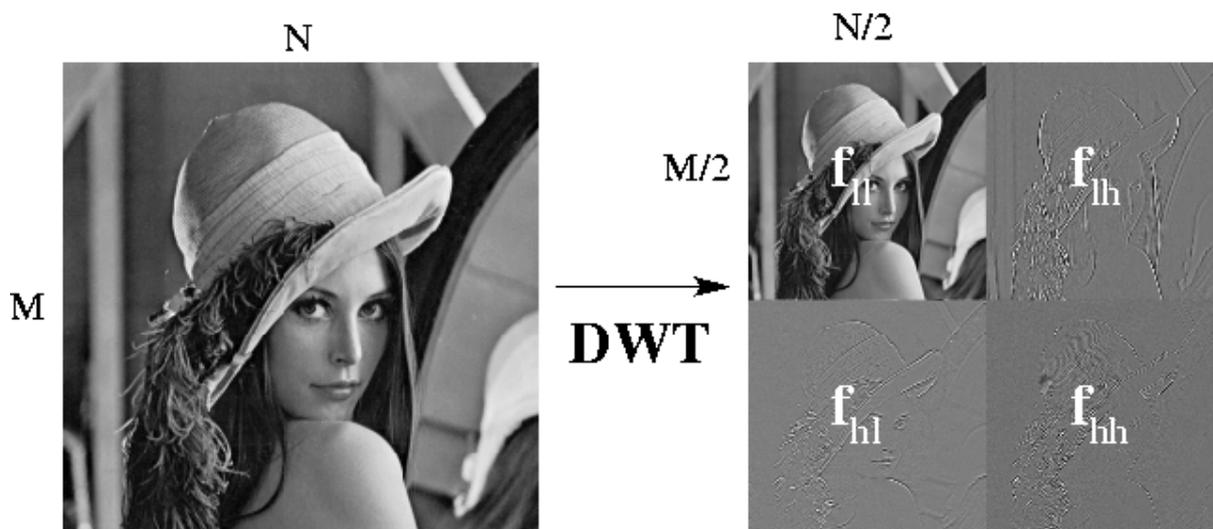


Figura 3.2: Descomposición wavelet de una imagen.

bandas obtenidas en el primer nivel de la transformada wavelet de la imagen. Un caso particular de esta descomposición multinivel es el aplicado frecuentemente en compresión de imágenes basada en la transformada wavelet, en la que sólo se descompone la banda de los coeficientes de escalado,  $\tilde{f}_l$ . Sin embargo, por sencillez notacional sólo vamos a emplear una descomposición de un nivel en 4 canales. En todos los casos, estamos suponiendo una ordenación lexicográfica de los coeficientes que componen cada una de las bandas consideradas.

En el apéndice A se desarrolla en profundidad una formulación matricial de la descomposición subbanda basada en wavelets. Esta formulación, propuesta por primera vez en [70], nos permite la conversión de cualquier problema de filtrado lineal espacialmente invariante monocanal en uno multicanal. Los canales que vamos a considerar son las subbandas generadas por la descomposición wavelet de la imagen. La ventaja que aporta esta formulación es que las estructuras matriciales obtenidas poseen propiedades que nos permitirán desarrollar algoritmos de restauración basados en modelos de imagen multicanal en el dominio de las frecuencias, sin sacrificar las ventajas computacionales que proporciona la transformada de Fourier, reduciendo además la estacionaridad de nuestros modelos.

### 3.3. Modelo de imagen multicanal

Como ya hemos comentado en el capítulo anterior, el modelo de imagen es uno de los elementos que componen el paradigma jerárquico bayesiano. En esta sección vamos a describir el modelo de imagen multicanal que vamos a emplear, y que está basado en el modelo gaussiano generalizado que describimos a continuación.

La función de densidad de probabilidad de los Campos Aleatorios de Markov Gaussianos Generalizados (GGMRF: *Generalized Gaussian Markov Random Fields*) ([22]) es

$$p(\mathbf{f}|\alpha, p) = \frac{1}{Z_{prior}(\sigma_{\mathbf{f}}, p)} \exp \left\{ -\frac{1}{p\sigma_{\mathbf{f}}^p} \sum_{i=1}^{MN} |\mathbf{f}(i)|^p \right\}. \quad (3.1)$$

Obsérvese que la función de partición,  $Z_{prior}(\sigma_{\mathbf{f}}, p)$ , es escalable con respecto a  $\sigma_{\mathbf{f}}$ , en el sentido de que

$$Z_{prior}(\sigma_{\mathbf{f}}, p) = (p\sigma_{\mathbf{f}}^p)^{\frac{MN}{p}} Z_{prior}(1, p). \quad (3.2)$$

Podemos interpretar  $\sigma_{\mathbf{f}}^p = \alpha^{-1}$  como un parámetro de escala que controla la suavidad de la imagen y  $p$  como un parámetro de forma (véase la figura 3.3) que controla la formación de aristas o fronteras locales, de forma que cuando  $p = 2$  tenemos la distribución gaussiana clásica, que elimina el ruido pero produce imágenes excesivamente suaves, mientras que para valores de  $p$  cercanos a 1 preserva mejor la formación de fronteras. La función de potencial es convexa para  $p \geq 1$ . Un estudio en profundidad de esta distribución y de su uso en diversas áreas se puede encontrar en [130] y [131].

La motivación de la elección de un modelo de imagen multicanal gaussiano generalizado se basa en la observación de los coeficientes wavelet de una imagen típica. Dado que los coeficientes wavelet se obtienen mediante operadores similares a la diferenciación y que la estructura espacial de la mayoría de las imágenes típicas está formada por áreas suaves con algunas fronteras ocasionales, la distribución de los coeficientes wavelet debería estar concentrada formando un pico alrededor del cero (por la contribución de las áreas suaves) y tener colas relativamente amplias (correspondiendo a la aportación de las fronteras). Los estudios llevados a cabo en [24] confirman la validez de este modelo, propuesto anteriormente en [14]. Vamos a modelizar la distribución de los coeficientes

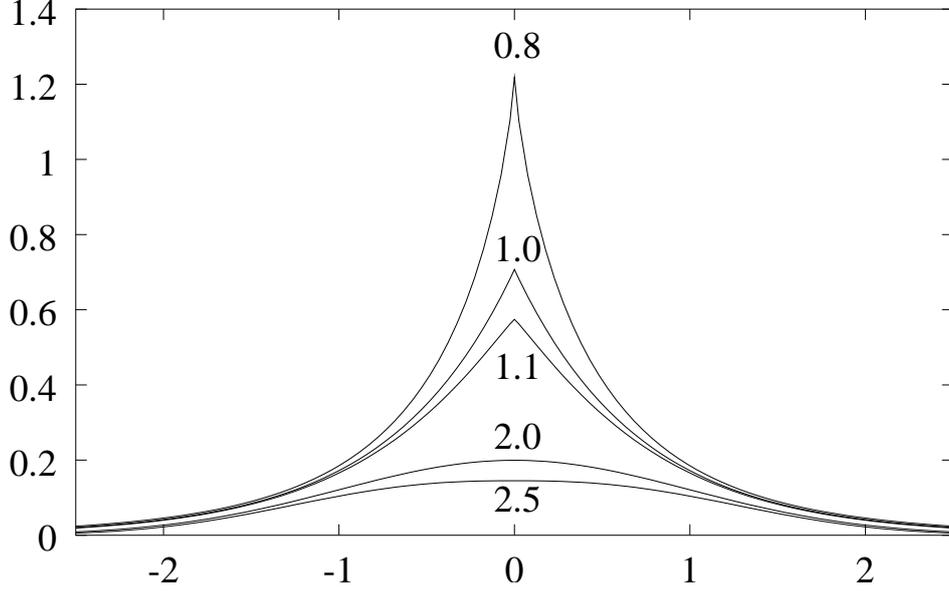


Figura 3.3: Distribuciones GGMRF para distintos valores del parámetro de forma,  $p$ , y con parámetro de escala  $\sigma_{\mathbf{f}} = 1,0$ .

wavelet de las bandas obtenidas mediante la transformada wavelet de la imagen mediante una función de densidad de probabilidad gaussiana generalizada:

$$p(\mathbf{f} | \underline{\alpha}, p) = \prod_{u,v \in \{l,h\}} p(\tilde{\mathbf{f}}_{uv} | \alpha_{uv}, p), \quad (3.3)$$

donde  $\underline{\alpha}$  denota el vector de hiperparámetros  $(\alpha_{ll}, \alpha_{lh}, \alpha_{hl}, \alpha_{hh})$  y

$$\begin{aligned} p(\tilde{\mathbf{f}}_{uv} | \alpha_{uv}, p) &= \frac{1}{Z_{prior}(\sigma_{\mathbf{f}_{uv}}, p)} \times \exp \left\{ -\frac{1}{p\sigma_{\mathbf{f}_{uv}}^p} \sum_{i=1}^{\frac{MN}{4}} |\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)|^p \right\} \\ &\propto \frac{1}{(p\sigma_{\mathbf{f}_{uv}}^p)^{\frac{MN}{4p}}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{p\sigma_{\mathbf{f}_{uv}}^p} \sum_{i=1}^{\frac{MN}{4}} |\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)|^p \right\} \\ &\propto \left( \frac{\alpha_{uv}}{p} \right)^{\frac{MN}{4p}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{p} \alpha_{uv} \sum_{i=1}^{\frac{MN}{4}} |\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)|^p \right\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

ya que, como hemos descrito en la ecuación (3.2),

$$Z_{prior}(\sigma_{\mathbf{f}_{uv}}, p) = (p\sigma_{\mathbf{f}_{uv}}^p)^{\frac{MN}{4p}} Z_{prior}(1, p) = \left( \frac{p}{\alpha_{uv}} \right)^{\frac{MN}{4p}} Z_{prior}(1, p), \quad (3.5)$$

esto es, la función de partición,  $Z_{prior}(\sigma_{\mathbf{f}_{uv}}, p)$ , es escalable con respecto al parámetro  $\sigma_{\mathbf{f}_{uv}}$ ,  $u, v \in \{l, h\}$ , donde  $\sigma_{\mathbf{f}_{uv}}^p = \alpha_{uv}^{-1}$  es un parámetro similar a la varianza de la probabilidad gaussiana.

Obsérvese que  $p$  es también un parámetro a estimar, y que va a determinar el comportamiento de cola de la función de densidad de probabilidad. Podemos ver que para  $p = 2$  tendremos una distribución gaussiana y para  $p = 1$ , una laplaciana. Teniendo en cuenta los estudios empíricos sobre los coeficientes wavelet de las imágenes realizados ([4], [110]) fijaremos, y no estimaremos,  $p \in (1, 2]$  en nuestros experimentos.

### 3.4. Modelo de degradación en el dominio wavelet

Si consideramos el modelo de formación de imágenes descrito en la sección 2.2, concretamente en la ecuación (2.16), con ruido gaussiano aditivo independiente de la señal, podemos escribir el modelo de degradación como

$$p(\mathbf{g}|\mathbf{f}, \beta) = \frac{1}{Z_n(\beta)} \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 \right], \quad (3.6)$$

cuya función de partición,  $Z_n(\beta)$ , se define como

$$Z_n(\beta) = \left( \frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{MN}{2}},$$

siendo  $M \times N$  el tamaño de la imagen y  $\beta^{-1} = \sigma_n^2$ , la varianza del ruido.

Siguiendo el esquema de descomposición multicanal de señales descrito en la sección 3.2, podemos formular el modelo de formación de la ecuación (2.16) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tilde{W}\mathbf{g}_D &= \tilde{W}\mathbf{H}_D\tilde{W}^T \tilde{W}\mathbf{f}_D + \tilde{W}\mathbf{n}_D \\ \tilde{\mathbf{g}} &= \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{f}} + \tilde{\mathbf{n}}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde  $\tilde{W}$  es una matriz que contiene los coeficientes de las respuestas a impulso de los filtros lineales espacialmente invariantes paso baja y paso alta empleados en el banco de filtros de la figura 3.1,  $\mathbf{g}_D$ ,  $\mathbf{H}_D$ ,  $\mathbf{f}_D$  y  $\mathbf{n}_D$  no son sino versiones reordenadas de la imagen observada, el operador de convolución, la imagen original y el ruido, respectivamente,

y  $\tilde{\mathbf{g}}$ ,  $\tilde{\mathbf{H}}$ ,  $\tilde{\mathbf{f}}$  y  $\tilde{\mathbf{n}}$  son sus correspondientes versiones en el dominio wavelet. Obsérvese que el hecho de estar considerando una transformación ortogonal hace que  $\tilde{\mathbf{n}}$  sea de nuevo gaussiano de media cero y varianza  $\beta^{-1} = \sigma_n^2$ . En el apéndice B se describe en detalle el proceso de descomposición de imágenes y operadores de convolución.

Puesto que es posible, como acabamos de ver, formular el modelo de formación de imágenes en el dominio wavelet mediante la ecuación (3.7), podemos formular el modelo de degradación del paradigma jerárquico bayesiano en un marco multicanal de la siguiente forma:

$$p(\tilde{\mathbf{g}}|\tilde{\mathbf{f}}, \beta) \propto \beta^{\frac{MN}{2}} \times \exp\left[-\frac{1}{2}\beta \|\tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{f}}\|^2\right], \quad (3.8)$$

donde, como ya hemos comentado anteriormente,  $\tilde{\mathbf{g}}$ ,  $\tilde{\mathbf{H}}$  y  $\tilde{\mathbf{f}}$  son la imagen observada, la matriz de emborronamiento y la imagen original, respectivamente, en el dominio wavelet.

### 3.5. Modelo de hiperparámetros

En [16] se muestra la posibilidad de emplear el enfoque bayesiano incluso cuando se dispone de muy poca, o incluso ninguna, información a priori sobre los hiperparámetros. En estos casos es necesario hacer uso de distribuciones a priori no informativas, término que denota distribuciones que no contienen información sobre los hiperparámetros, es decir, que no “dan preferencia” a un valor del hiperparámetro frente a otros. Una elección razonable de distribución no informativa sería aquella que diera la misma probabilidad a todos los posibles valores del parámetro. Es usual escoger como distribución a priori sobre los hiperparámetros la definida como:

$$\begin{aligned} p(\alpha) &\propto \text{const} > 0 \\ p(\beta) &\propto \text{const} > 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

definidas ambas en el intervalo  $[0, \infty)$ . Obsérvese que esta función es impropia, en el sentido de que su integral sobre el intervalo  $[0, \infty)$  es infinita.

Es posible incorporar conocimiento preciso sobre los hiperparámetros en la distribución a priori, aunque no haremos uso de estas distribuciones de probabilidad en esta

memoria, empleando de esta forma distribuciones sobre los hiperparámetros con una enorme varianza de forma que evitemos el problema de fijar  $\alpha$  y  $\beta$  y hagamos que los elementos de la siguiente etapa se encarguen de todas las estimaciones.

### 3.6. Restauración basada en la evidencia usando modelos de Gauss-Markov generalizados

Estudiado en el capítulo anterior los elementos del paradigma bayesiano jerárquico y las diferentes soluciones al problema de la restauración de imágenes digitales, y descritos en las secciones 3.3, 3.4 y 3.5 el modelo de imagen multicanal, el modelo de degradación formulado en el dominio wavelet y el modelo de los hiperparámetros, en esta sección vamos a desarrollar un algoritmo basado en la evidencia para la estimación de los hiperparámetros y la restauración simultánea de la imagen en el dominio wavelet.

Si nuestro modelo de imagen es el definido en la ecuación (3.4) y el modelo de degradación es el descrito en la ecuación (3.8) tenemos que:

$$\begin{aligned}
 p(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}} | \underline{\alpha}, \beta) &\propto \beta^{\frac{MN}{2}} \times \prod_{uv \in \{l, h\}} \left( \frac{\alpha_{uv}}{p} \right)^{\frac{MN}{4p}} \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta \|\tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{f}}\|^2 \right] \\
 &\times \exp \left[ \sum_{uv \in \{l, h\}} -\frac{1}{p} \alpha_{uv} \sum_{i=1}^{\frac{MN}{4}} |\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)|^p \right], \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

donde  $\underline{\alpha}$  denota el vector de hiperparámetros  $(\alpha_{ll}, \alpha_{lh}, \alpha_{hl}, \alpha_{hh})$ .

Como se detalla en la sección 2.4, el análisis basado en la evidencia realiza la estimación simultánea de la imagen y los hiperparámetros en dos pasos. En el primero, se seleccionan  $\hat{\underline{\alpha}} = (\hat{\alpha}_{ll}, \hat{\alpha}_{lh}, \hat{\alpha}_{hl}, \hat{\alpha}_{hh})$ , y  $\hat{\beta}$  como los estimadores de máxima verosimilitud (recordemos que estamos considerando distribuciones impropias para los hiperparámetros) de  $\underline{\alpha}$  y  $\beta$  a partir de  $p(\underline{\alpha}, \beta | \tilde{\mathbf{g}})$  y estos parámetros se emplean en el segundo paso para realizar la restauración de la imagen.

A continuación vamos a estudiar en detalle los pasos de la estimación mediante el análisis jerárquico bayesiano basado en la evidencia y propondremos un algoritmo iterativo para realizar la estimación simultánea de los hiperparámetros y de la restauración;

en primer lugar estudiaremos la estimación de la imagen para analizar después el paso de estimación de los hiperparámetros.

### 3.6.1. Paso de estimación de la imagen

Veamos cómo realizar la estimación de la imagen. Fijados  $\underline{\alpha}$  y  $\beta$ ,  $\tilde{\mathbf{f}}^{(\underline{\alpha},\beta)}$  se obtiene como la imagen que satisface

$$\tilde{\mathbf{f}}^{(\underline{\alpha},\beta)} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{f}}} \left[ \frac{1}{2} \beta \left\| \tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{f}} \right\|^2 + \sum_{uv \in \{l,h\}} \frac{1}{p} \alpha_{uv} \sum_{i=1}^{\frac{MN}{4}} \left| \tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i) \right|^p \right]. \quad (3.11)$$

Para evitar problemas de diferenciabilidad, utilizaremos una aproximación “suave” de la p-norma (propuesta anteriormente en [14]):

$$\|\mathbf{x}\|^p \approx \sum_i \left[ (\mathbf{x}(i)^2 + \gamma)^{\frac{p}{2}} - \gamma^{\frac{p}{2}} \right], \quad (3.12)$$

donde  $\gamma \geq 0$  es una constante de estabilización y  $\mathbf{x}(i)$  denota el  $i$ -ésimo elemento del vector  $\mathbf{x}$ .

Si empleamos la aproximación de la p-norma de la ecuación (3.12) y derivamos la ecuación (3.11) con respecto a  $\tilde{\mathbf{f}}$  tendremos que en  $\tilde{\mathbf{f}}^{(\underline{\alpha},\beta)}$  se cumple

$$\mathbf{A} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^{(\underline{\alpha},\beta)}} \tilde{\mathbf{f}}^{(\underline{\alpha},\beta)} = \beta \tilde{\mathbf{H}}^T \left( \tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{f}}^{(\underline{\alpha},\beta)} \right), \quad (3.13)$$

con  $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^{(\underline{\alpha},\beta)}}$  una matriz diagonal por bloques de la forma

$$\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^{(\underline{\alpha},\beta)}} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}_{ll}^{(\underline{\alpha},\beta)}} & & & \\ & \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}_{lh}^{(\underline{\alpha},\beta)}} & & \\ & & \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}_{hl}^{(\underline{\alpha},\beta)}} & \\ & & & \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}_{hh}^{(\underline{\alpha},\beta)}} \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

donde

$$\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}_{uv}^{(\underline{\alpha},\beta)}} = \text{diag} \left[ \left( \tilde{\mathbf{f}}_{uv}^{(\underline{\alpha},\beta)}(i)^2 + \gamma \right)^{\frac{p}{2}-1} \right]_{i=1}^{\frac{MN}{4}}, \quad (3.15)$$

denotando  $\tilde{\mathbf{f}}_{uv}^{(\alpha,\beta)}(i)$  el  $i$ -ésimo elemento de  $\tilde{\mathbf{f}}_{uv}^{(\alpha,\beta)}$  y donde  $\mathbf{A}$  es una matriz diagonal por bloques de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{ll} & & & \\ & \mathbf{A}_{lh} & & \\ & & \mathbf{A}_{hl} & \\ & & & \mathbf{A}_{hh} \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

con  $\mathbf{A}_{uv} = \alpha_{uv} \times I_{\frac{MN}{4} \times \frac{MN}{4}}$ ,  $u, v \in \{l, h\}$ .

### 3.6.1.1. Algoritmo de restauración multicanal propuesto por Belge *et al.* en [14]

Llegados a este punto, debemos estudiar, antes de proceder a derivar el algoritmo de restauración multicanal con estimación simultánea de los hiperparámetros que vamos a proponer, la solución propuesta por Belge y otros en [14] para este problema. En este trabajo los autores proponen, comenzando con una solución inicial,  $\tilde{\mathbf{f}}^0$ , un método iterativo para resolver la ecuación (3.13). El método reescribe la ecuación de la siguiente forma

$$\left( \beta \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{A} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^k} \right) \tilde{\mathbf{f}}^{k+1} = \beta \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{g}} \quad (3.17)$$

para obtener  $\tilde{\mathbf{f}}^{k+1}$ .  $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^k}$  se obtiene sustituyendo  $\tilde{\mathbf{f}}^{(\alpha,\beta)}(i)$  por  $\tilde{\mathbf{f}}^k(i)$  en la ecuación (3.14) y se establece como criterio de terminación que  $\|\tilde{\mathbf{f}}^{k+1} - \tilde{\mathbf{f}}^k\| / \|\tilde{\mathbf{f}}^k\| < \rho_1$ , con  $\rho_1$  una constante positiva cercana a cero. La formulación detallada del algoritmo sería la siguiente:

#### Algoritmo 3.1 Restauración multicanal propuesta por Belge *et al.*

1. Escoger una solución inicial,  $\tilde{\mathbf{f}}^0$
2. Repetir
  - a) Calcular  $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^k}$  a partir de  $\tilde{\mathbf{f}}^k$

$$\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^k} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}_{ll}^k} & & & \\ & \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}_{lh}^k} & & \\ & & \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}_{hl}^k} & \\ & & & \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}_{hh}^k} \end{pmatrix},$$

$$\text{donde } \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}_{uv}^k} = \text{diag} \left[ \left( \tilde{\mathbf{f}}_{uv}^k(i)^2 + \gamma \right)^{\frac{p}{2}-1} \right]_{i=1}^{\frac{MN}{4}}.$$

b) Resolver en  $\mathbf{x}$  el sistema de ecuaciones

$$\left( \beta \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{A} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^k} \right) \mathbf{x} = \beta \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{g}}$$

mediante una técnica de gradiente:

- Seleccionar una solución inicial para el sistema:  $\mathbf{x}^0 = \tilde{\mathbf{f}}^k$
- Repetir

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i - \epsilon \left[ \left( \beta \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{A} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^k} \right) \mathbf{x}^i - \beta \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{g}} \right]$$

$$\text{hasta que } \frac{\|\mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^i\|}{\|\mathbf{x}^i\|} < \rho_2.$$

c)  $\tilde{\mathbf{f}}^{k+1} = \mathbf{x}$ , la solución del sistema de ecuaciones del paso 2b.

$$\text{hasta que } \frac{\|\tilde{\mathbf{f}}^{k+1} - \tilde{\mathbf{f}}^k\|}{\|\tilde{\mathbf{f}}^k\|} < \rho_1.$$

Es interesante observar que el esquema iterativo de la ecuación (3.17) constituye un caso particular de la regularización semi-cuadrática presentada en [54] y del esquema ARTUR propuesto en [34], donde se destaca que los coeficientes wavelet de mayor magnitud (asociados a las fronteras de la imagen) resultan menos penalizados que los menores, y que el algoritmo de restauración converge. En el caso en que  $p \geq 1$  y  $\tilde{\mathbf{H}}$  sea de rango máximo, el algoritmo converge y la solución calculada es el único mínimo de la ecuación (3.11). Sin embargo, cuando  $p < 1$ , como en [14], se plantea un problema de no convexidad y el algoritmo proporciona un mínimo local de la ecuación (3.11) (véase, para más detalles, [34]).

Hemos de hacer también algunas reflexiones sobre el doble papel que juega el parámetro  $\gamma$ . Por un lado, controla la calidad de la aproximación realizada mediante la ecuación (3.12) de forma que determina lo cerca que ésta está de la p-norma del modelo a priori. Si empleamos un  $\gamma$  relativamente pequeño, obtendremos mejores restauraciones de las fronteras de la imagen, puesto que un menor valor de  $\gamma$  proporciona una mejor aproximación de la p-norma. Por otro lado,  $\gamma$  determina la rapidez de la convergencia del algoritmo. Si  $\gamma$  es relativamente grande, el algoritmo es más rápido, y la convergencia se

ralentiza conforme  $\gamma$  se hace menor. Por lo tanto, debería establecerse un compromiso entre rapidez en la convergencia y preservación de las fronteras de la imagen. A partir de resultados experimentales, en [14] se sugiere que para  $\gamma \approx 1$  no se observan diferencias visuales de las restauraciones obtenidas con  $\gamma \ll 1$ , mientras se logra la convergencia en un número de iteraciones razonable.

Obsérvese que el algoritmo descrito en la ecuación (3.17) implica la resolución de un gran sistema de ecuaciones lineales que involucra matrices de gran tamaño. En [14] se propone la resolución de este sistema de ecuaciones mediante un método de gradiente para obtener la solución del sistema,  $\tilde{\mathbf{f}}^{k+1}$ , en cada paso de la ecuación (3.17). De esta forma, el algoritmo descrito resulta ser doblemente iterativo, de forma que las iteraciones exteriores están orientadas a actualizar la solución,  $\tilde{\mathbf{f}}^k$ , y las iteraciones del bucle interior están orientadas a la resolución del sistema de ecuaciones mediante una técnica de gradiente.

Como se explica en el apéndice A, podemos aprovechar la estructura de la matriz  $\tilde{\mathbf{H}}$  para reducir el coste computacional mediante su diagonalización empleando la Transformada de Fourier Discreta. Además, la matriz  $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^k}$  es diagonal en el dominio wavelet, por lo que podremos realizar los cálculos necesarios de forma eficiente si pasamos del dominio wavelet al dominio wavelet-Fourier y viceversa.

### 3.6.1.2. Restauración multicanal basada en la evidencia

El algoritmo descrito anteriormente requiere el cálculo del paso óptimo del gradiente, además de ser doblemente iterativo, lo cual implicará una elevada complejidad computacional. A continuación propondremos un algoritmo iterativo que salva estos inconvenientes.

Sumando  $\beta\tilde{\mathbf{f}}^{(\alpha,\beta)}$  a ambos lados de la ecuación (3.13) tendremos:

$$(\beta\mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^{(\alpha,\beta)}})\tilde{\mathbf{f}}^{(\alpha,\beta)} = \beta\tilde{\mathbf{H}}^T(\tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{f}}^{(\alpha,\beta)}) + \beta\tilde{\mathbf{f}}^{(\alpha,\beta)}, \quad (3.18)$$

con lo que, despejando  $\tilde{\mathbf{f}}^{(\alpha,\beta)}$  en la parte izquierda de la ecuación anterior:

$$\tilde{\mathbf{f}}^{(\alpha,\beta)} = (\beta\mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^{(\alpha,\beta)}})^{-1} \left[ \beta\tilde{\mathbf{H}}^T(\tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{f}}^{(\alpha,\beta)}) + \beta\tilde{\mathbf{f}}^{(\alpha,\beta)} \right], \quad (3.19)$$

Para obtener un algoritmo iterativo a partir de esta ecuación, sustituiremos  $\tilde{\mathbf{f}}^{(\alpha, \beta)}$  por  $\tilde{\mathbf{f}}^{k+1}$  en la parte izquierda y por  $\tilde{\mathbf{f}}^k$  en la parte derecha, obteniendo:

$$\tilde{\mathbf{f}}^{k+1} = (\beta \mathbf{I} + \mathbf{A} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^k})^{-1} \left[ \beta \tilde{\mathbf{H}}^T (\tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{f}}^k) + \beta \tilde{\mathbf{f}}^k \right], \quad (3.20)$$

donde  $\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^k}$  se obtiene sustituyendo  $\tilde{\mathbf{f}}^{(\alpha, \beta)}$  por  $\tilde{\mathbf{f}}^k$  en la ecuación (3.14), esto es:

$$\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^k} = \text{diag} \left[ \left( \tilde{\mathbf{f}}^k(i)^2 + \gamma \right)^{\frac{p}{2}-1} \right]_{i=1}^{MN}.$$

Obsérvese que podemos expresar la ecuación (3.20) como:

$$\tilde{\mathbf{f}}^{k+1} = (\beta \mathbf{I} + \mathbf{A} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^k})^{-1} \left[ \beta \tilde{\mathbf{H}}^T (\tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{f}}^k) - \mathbf{A} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^k} \tilde{\mathbf{f}}^k \right] + (\beta \mathbf{I} + \mathbf{A} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^k}) (\beta \mathbf{I} + \mathbf{A} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^k})^{-1} \tilde{\mathbf{f}}^k,$$

de donde tenemos:

$$\tilde{\mathbf{f}}^{k+1} = \tilde{\mathbf{f}}^k - (\beta \mathbf{I} + \mathbf{A} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^k})^{-1} \left[ \left( \beta \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{A} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^k} \right) \tilde{\mathbf{f}}^k - \beta \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{g}} \right], \quad (3.21)$$

que es un método de gradiente. Podemos observar que la matriz  $(\beta \mathbf{I} + \mathbf{A} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^k})^{-1}$  hace el papel de paso del gradiente en el método iterativo obtenido.

Este método iterativo, cuya convergencia ha sido comprobada experimentalmente, tiene la ventaja con respecto al propuesto por Belge y otros y descrito en la sección 3.1 de que no precisa el cálculo del paso óptimo del gradiente ni del hessiano, además de no ser doblemente iterativo. Obsérvese que estamos fijando un paso diferente para cada píxel de la imagen, definido por la matriz  $(\beta \mathbf{I} + \mathbf{A} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}^k})^{-1}$ .

### 3.6.2. Paso de estimación de parámetros

Como hemos descrito en la sección 2.4, en el primer paso del análisis basado en la evidencia se seleccionan  $\hat{\underline{\alpha}} = (\hat{\alpha}_{ll}, \hat{\alpha}_{lh}, \hat{\alpha}_{hl}, \hat{\alpha}_{hh})$ , y  $\hat{\beta}$  como los estimadores de máxima verosimilitud de  $\underline{\alpha}$  y  $\beta$  a partir de  $p(\underline{\alpha}, \beta | \tilde{\mathbf{g}})$ , esto es, vamos a seleccionar  $\hat{\underline{\alpha}}$  y  $\hat{\beta}$  como

$$\hat{\underline{\alpha}}, \hat{\beta} = \arg \max_{\underline{\alpha}, \beta} p(\tilde{\mathbf{g}} | \underline{\alpha}, \beta), \quad (3.22)$$

donde

$$p(\underline{\alpha}, \beta | \tilde{\mathbf{g}}) \propto p(\tilde{\mathbf{g}} | \underline{\alpha}, \beta) = \int_{\tilde{\mathbf{f}}} p(\tilde{\mathbf{f}} | \underline{\alpha}) p(\tilde{\mathbf{g}} | \tilde{\mathbf{f}}, \beta) d\tilde{\mathbf{f}}$$

Como ya hemos visto,

$$\begin{aligned} p(\tilde{\mathbf{g}}|\tilde{\mathbf{f}}, \beta) &= \frac{1}{Z_{noise}(\beta)} \times \exp\left[-\frac{1}{2}\beta \|\tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{f}}\|^2\right] \\ &\propto \beta^{\frac{MN}{2}} \times \exp\left[-\frac{1}{2}\beta \|\tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{f}}\|^2\right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} p(\tilde{\mathbf{f}}|\underline{\alpha}) &= \prod_{u,v \in \{l,h\}} \frac{1}{Z_{prior}(\sigma_{\mathbf{f}_{uv}}, p)} \times \exp\left[\sum_{uv \in \{l,h\}} -\frac{1}{p\sigma_{\mathbf{f}_{uv}}^p} \sum_{i=1}^{\frac{MN}{4}} |\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)|^p\right] \\ &\propto \prod_{u,v \in \{l,h\}} \frac{1}{(p\sigma_{\mathbf{f}_{uv}}^p)^{\frac{MN}{4p}}} \times \exp\left[\sum_{uv \in \{l,h\}} -\frac{1}{p\sigma_{\mathbf{f}_{uv}}^p} \sum_{i=1}^{\frac{MN}{4}} |\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)|^p\right] \\ &\propto \prod_{u,v \in \{l,h\}} \left(\frac{\alpha_{uv}}{p}\right)^{\frac{MN}{4p}} \times \exp\left[\sum_{uv \in \{l,h\}} -\frac{1}{p}\alpha_{uv} \sum_{i=1}^{\frac{MN}{4}} |\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)|^p\right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

Integrando  $p(\tilde{\mathbf{f}}|\underline{\alpha})p(\tilde{\mathbf{g}}|\tilde{\mathbf{f}}, \beta)$  en  $\tilde{\mathbf{f}}$  tenemos

$$\begin{aligned} p(\underline{\alpha}, \beta|\tilde{\mathbf{g}}) &\propto \beta^{\frac{MN}{2}} \times \prod_{u,v \in \{l,h\}} \left(\frac{\alpha_{uv}}{p}\right)^{\frac{MN}{4p}} \times \int_{\tilde{\mathbf{f}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\beta \|\tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{f}}\|^2\right] \\ &\quad \times \exp\left[\sum_{u,v \in \{l,h\}} -\frac{1}{p}\alpha_{uv} \sum_{i=1}^{\frac{MN}{4}} |\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)|^p\right] d\tilde{\mathbf{f}} \\ &= \beta^{\frac{MN}{2}} \times \prod_{u,v \in \{l,h\}} \left(\frac{\alpha_{uv}}{p}\right)^{\frac{MN}{4p}} \\ &\quad \times \int_{\tilde{\mathbf{f}}} \exp\left[-\frac{1}{2}\beta \|\tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{f}}\|^2 - \sum_{u,v \in \{l,h\}} \frac{1}{p}\alpha_{uv} \sum_{i=1}^{\frac{MN}{4}} |\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)|^p\right] d\tilde{\mathbf{f}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Para poder calcular la integral anterior, desarrollamos alrededor de  $\tilde{\mathbf{f}}^{(\underline{\alpha}, \beta)}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\beta \|\tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{f}}\|^2 + \sum_{u,v \in \{l,h\}} \frac{1}{p}\alpha_{uv} \sum_{i=1}^{\frac{MN}{4}} |\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)|^p &\approx \frac{1}{2}\beta \|\tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{f}}^{(\underline{\alpha}, \beta)}\|^2 \\ + \sum_{u,v \in \{l,h\}} \frac{1}{p}\alpha_{uv} \sum_{i=1}^{\frac{MN}{4}} |\tilde{\mathbf{f}}_{uv}^{(\underline{\alpha}, \beta)}(i)|^p - \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{f}}^{(\underline{\alpha}, \beta)})^t &\left(\beta\tilde{\mathbf{H}}^t\tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{A}\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}}\right)(\tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{f}}^{(\underline{\alpha}, \beta)}), \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{A}$  ha sido definida en la ecuación (3.16) y  $\ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}}$  también es una matriz diagonal por bloques de la forma

$$\ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}} = \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}_{ll}} & & & \\ & \ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}_{hh}} & & \\ & & \ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}_{hl}} & \\ & & & \ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}_{hh}} \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

con

$$\ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}_{uv}} = \text{diag} \left[ \left( \frac{p}{2} - 1 \right) \left( \tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)^2 + \gamma \right)^{\left(\frac{p}{2}-2\right)} \times 2\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)^2 + \left( \tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)^2 + \gamma \right)^{\left(\frac{p}{2}-1\right)} \right]_{i=1}^{\frac{MN}{4}}, \quad (3.27)$$

$u, v \in \{l, h\}$ . Obsérvese que estamos haciendo uso de la aproximación “suave” de la  $p$ -norma propuesta en [14] y formulada en la ecuación (3.12). Además, se verifica que para  $p \in (1, 2]$   $\ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}_{uv}}$  es semidefinida positiva ya que podemos reescribir cada elemento de la diagonal de  $\ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}_{uv}}$  como

$$\left( \tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)^2 + \gamma \right)^{\left(\frac{p}{2}-2\right)} \left[ \left( \frac{p}{2} - 1 \right) \times 2\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)^2 + \left( \tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)^2 + \gamma \right) \right],$$

y desarrollando tenemos

$$\left( \tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)^2 + \gamma \right)^{\left(\frac{p}{2}-2\right)} \left[ p\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)^2 - 2\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)^2 + \gamma \right],$$

que es positivo para  $p \geq 1$ , puesto que  $\gamma \geq 0$ .

Sustituyendo la ecuación (3.26) en la integral de la ecuación (3.25), tenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\mathbf{f}}} \exp \left[ -\frac{1}{2}\beta \left\| \tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{f}} \right\|^2 - \sum_{u,v \in \{l,h\}} \frac{1}{p} \alpha_{uv} \sum_{i=1}^{\frac{MN}{4}} \left| \tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i) \right|^p \right] d\tilde{\mathbf{f}} = \\ & \exp \left[ -\frac{1}{2}\beta \left\| \tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{f}}^{(\alpha,\beta)} \right\|^2 - \sum_{u,v \in \{l,h\}} \frac{1}{p} \alpha_{uv}^p \sum_{i=1}^{\frac{MN}{4}} \left| \tilde{\mathbf{f}}_{uv}^{(\alpha,\beta)}(i) \right|^p \right] \\ & \times \int_{\tilde{\mathbf{f}}} \exp \left[ \frac{1}{2} \left( \tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{f}}^{(\alpha,\beta)} \right)^t \left( \beta \tilde{\mathbf{H}}^t \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{A} \ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}} \right) \left( \tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{f}}^{(\alpha,\beta)} \right) \right] d\tilde{\mathbf{f}} \\ & = \exp \left[ -\frac{1}{2}\beta \left\| \tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{f}}^{(\alpha,\beta)} \right\|^2 - \sum_{u,v \in \{l,h\}} \frac{1}{p} \alpha_{uv} \sum_{i=1}^{\frac{MN}{4}} \left| \tilde{\mathbf{f}}_{uv}^{(\alpha,\beta)}(i) \right|^p \right] \times \det \left[ \beta \tilde{\mathbf{H}}^t \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{A} \ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}} \right]^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donde  $\det[\cdot]$  denota el determinante.

Por lo tanto,

$$p(\underline{\alpha}, \beta | \tilde{\mathbf{g}}) \propto \beta^{\frac{MN}{2}} \times \prod_{u,v \in \{l,h\}} \left( \frac{\alpha_{uv}}{p} \right)^{\frac{MN}{4p}} \times \det \left[ \beta \tilde{\mathbf{H}}^t \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{A} \ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta \left\| \tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{f}} \right\|^2 - \sum_{u,v \in \{l,h\}} \frac{1}{p} \alpha_{uv} \sum_{i=1}^{\frac{MN}{4}} |\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)|^p \right]. \quad (3.28)$$

Calculemos ahora  $-2\mathcal{L}_g(\underline{\alpha}, \beta) = -2 \log p(\underline{\alpha}, \beta | \tilde{\mathbf{g}})$ :

$$-2 \log p(\underline{\alpha}, \beta | \tilde{\mathbf{g}}) = -MN \log \beta - \sum_{u,v \in \{l,h\}} \frac{MN}{2p} \log \left( \frac{\alpha_{uv}}{p} \right) + \log \det \left[ \beta \tilde{\mathbf{H}}^t \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{A} \ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}} \right] \\ + \beta \left\| \tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{f}} \right\|^2 + \sum_{u,v \in \{l,h\}} \frac{2}{p} \alpha_{uv} \sum_{i=1}^{\frac{MN}{4}} |\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)|^p,$$

y diferenciamos con respecto a  $\alpha_{uv}$ ,  $u, v \in \{l, h\}$  y  $\beta$  para obtener las condiciones que se satisfacen en los máximos. Diferenciando en primer lugar con respecto a  $\beta$  e igualando a cero obtenemos:

$$\frac{\partial [-2 \log p(\underline{\alpha}, \beta | \tilde{\mathbf{g}})]}{\partial \beta} = -\frac{MN}{\beta} + \text{tr} \left[ \left( \beta \tilde{\mathbf{H}}^t \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{A} \ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{H}}^t \tilde{\mathbf{H}} \right] + \left\| \tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{f}} \right\|^2 = 0,$$

donde  $\text{tr}[\cdot]$  denota la traza, con lo que podemos despejar  $\beta$ :

$$\beta^{-1} = \frac{\text{tr} \left[ \left( \beta \tilde{\mathbf{H}}^t \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{A} \ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{H}}^t \tilde{\mathbf{H}} \right] + \left\| \tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{f}} \right\|^2}{MN}. \quad (3.29)$$

Diferenciando ahora con respecto a  $\alpha_{uv}$ ,  $u, v \in \{l, h\}$

$$\frac{\partial [-2 \log p(\underline{\alpha}, \beta | \tilde{\mathbf{g}})]}{\partial \alpha_{uv}} = -\frac{MN}{2p} \frac{1}{\alpha_{uv}} + \text{tr} \left[ \left( \beta \tilde{\mathbf{H}}^t \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{A} \ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{A} \ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}}}{\partial \alpha_{uv}} \right] + \frac{2}{p} \sum_{i=1}^{\frac{MN}{4}} |\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)|^p = 0,$$

de donde

$$\alpha_{uv}^{-1} = \frac{\frac{2}{p} \sum_{i=1}^{\frac{MN}{4}} |\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(i)|^p + \text{tr} \left[ \left( \beta \tilde{\mathbf{H}}^t \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{A} \ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{A} \ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}}}{\partial \alpha_{uv}} \right]}{MN/2p}. \quad (3.30)$$

Obsérvese que  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \alpha_{uv}}$  es una matriz diagonal por bloques en la que se anulan todos los bloques de la diagonal salvo  $\mathbf{A}_{uv}$ .

Es importante observar que la matriz  $\ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}}$ , a pesar de ser diagonal, no es circulante por bloques, por lo que el cálculo de  $\left(\beta\tilde{\mathbf{H}}^t\tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{A}\ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}}\right)^{-1}$ , necesario en la estimación de los parámetros, como acabamos de ver, resulta sumamente costosa desde el punto de vista computacional. Por este motivo vamos a aproximarla para permitir de esta manera el cálculo en el dominio de las frecuencias de las inversas y las trazas involucradas en la estimación de los parámetros mediante las ecuaciones (3.29) y (3.30). Vamos a utilizar dos aproximaciones diferentes: en la primera escribiremos

$$\ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}_{uv}} = \text{diag} \left[ \left( \frac{p}{2} - 1 \right) \left( \sum_{j=1}^{MN/4} \frac{\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(j)^2}{MN/4} + \gamma \right)^{\left(\frac{p}{2}-2\right)} \times 2 \sum_{j=1}^{MN/4} \frac{\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(j)^2}{MN/4} + \left( \sum_{j=1}^{MN/4} \frac{\tilde{\mathbf{f}}_{uv}(j)^2}{MN/4} + \gamma \right)^{\left(\frac{p}{2}-1\right)} \right]_{i=1}^{\frac{MN}{4}} ; \quad (3.31)$$

en la segunda escribiremos

$$\ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}_{uv}} = \text{diag} \left[ \sum_{j=1}^{MN/4} \frac{\ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}_{uv}}(j)}{MN/4} \right]_{i=1}^{\frac{MN}{4}} . \quad (3.32)$$

En la sección 3.7 mostraremos la diferencia entre los resultados obtenidos mediante ambas aproximaciones.

Antes de terminar, debemos considerar la solución propuesta por Belge *et al.* en [14] para la selección de los parámetros. Los autores formulan el problema mediante un esquema de regularización en el que la estimación de la imagen original se obtiene mediante la minimización de la siguiente función de coste:

$$J(f, \lambda) = \left\| \tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{f} \right\|^2 + \sum_{uv \in \{l, h\}} \lambda_{uv} \|W_{uv}\mathbf{f}\|^p, \quad (3.33)$$

donde  $\lambda = (\lambda_{ll}, \lambda_{lh}, \lambda_{hl}, \lambda_{hh})$ ,  $\lambda_{uv}$ ,  $u, v \in \{l, h\}$  son los parámetros de regularización y  $W_{uv}$ ,  $u, v \in \{l, h\}$  son los correspondientes operadores de regularización, que extraen la banda correspondiente de la transformada wavelet de  $\mathbf{f}$ , como se detalla en el apéndice B. Obsérvese que  $\lambda_{uv} = \alpha_{uv}/\beta$  en la formulación desarrollada en este capítulo. Como puede

verse, la función de coste de la ecuación (3.33) representa un problema de mínimos cuadrados con múltiples restricciones.

En [14] se propone una extensión multidimensional del método de la L-curva, llamada método de la L-hipersuperficie (véase [13] y [14] para una descripción completa del método de la L-hipersuperficie) para la selección de los parámetros de regularización,  $\lambda_{uv}$ . El objetivo de este método es encontrar un compromiso entre los errores de regularización y de perturbación mediante la búsqueda de una “esquina” en la hipersuperficie correspondiente a la norma residual en función de las restricciones impuestas en el problema de minimización para un rango de valores posibles de los parámetros. Uno de los primeros problemas que se plantea al emplear este método es determinar cuál es ese rango de valores en el que se puede encontrar la solución.

Deberíamos destacar que esta estimación de parámetros no se realiza de forma simultánea al proceso de restauración, sino que debe llevarse a cabo de forma previa a la restauración misma. También es interesante observar que, para el problema planteado, los autores concluyen que, de hecho, hay más de una posible elección del parámetro de regularización correspondiente a los coeficientes de escala en tanto hayamos realizado una buena selección del parámetro asociado a los coeficientes wavelet, de forma que las restauraciones obtenidas deberían tener aproximadamente la misma calidad. La gran complejidad computacional del método, que motiva que el valor del parámetro no se calcule sobre la imagen, sino para una subimagen de tamaño moderado (típicamente  $32 \times 32$ ) que podría no tener las mismas características que la imagen, lo que daría lugar a una mala estimación del parámetro, junto con la existencia de múltiples máximos/mínimos en la L-hipersuperficie suponen una dificultad adicional en la selección de valores para los parámetros de regularización

### 3.6.3. Algoritmo de restauración multicanal con estimación simultánea de los hiperparámetros

Como conclusión, formulemos el algoritmo resultante del análisis basado en la evidencia que hemos desarrollado a lo largo del capítulo, que estará formado por dos pasos, uno

de estimación de los hiperparámetros basado en las ecuaciones (3.29) y (3.30), donde los términos de la derecha de cada ecuación se obtendrían a partir de los valores de la iteración anterior, y otro de estimación de la imagen original basado en la ecuación (3.21) en el que se haría uso de los parámetros recién estimados. Estableceremos como criterio de convergencia que  $\|\tilde{\mathbf{f}}^{k+1} - \tilde{\mathbf{f}}^k\| / \|\tilde{\mathbf{f}}^k\| < \rho_1$ , con  $\rho_1$  una constante positiva cercana a 0.

**Algoritmo 3.2 Restauración adaptativa modificada con estimación de parámetros**

1. Escoger una solución inicial,  $\tilde{\mathbf{f}}^0$ ,  $\underline{\alpha}^0$  y  $\beta^0$

2. Repetir

a) Estimación de parámetros: Calcular  $\alpha_{uv}^{k+1}$ ,  $uv \in \{l, h\}$  y  $\beta^{k+1}$  a partir de  $\tilde{\mathbf{f}}^k$ :

$$(\beta^{k+1})^{-1} = \frac{\text{tr} \left[ \left( \beta^k \tilde{\mathbf{H}}^t \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{A}^k \ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}^k} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{H}}^t \tilde{\mathbf{H}} \right] + \|\tilde{\mathbf{g}} - \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{f}}^k\|^2}{MN}$$

$$(\alpha_{uv}^{k+1})^{-1} = \frac{\frac{2}{p} \sum_{i=1}^{\frac{MN}{4}} \left| \tilde{\mathbf{f}}_{uv}^k(i) \right|^p + \text{tr} \left[ \left( \beta^k \tilde{\mathbf{H}}^t \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{A}^k \ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}^k} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}^k}{\partial \alpha_{uv}^k} \ddot{\mathbf{D}}_{\tilde{\mathbf{f}}^k} \right]}{MN/2p}$$

b) Estimación de la imagen: Calcular  $\tilde{\mathbf{f}}^{k+1}$  a partir de  $\alpha_{uv}^{k+1}$ ,  $u, v \in \{l, h\}$ ,  $\beta^{k+1}$  y  $\tilde{\mathbf{f}}^k$ :

▪ Seleccionar como solución inicial,  $\tilde{\mathbf{f}}_0^{k+1} = \tilde{\mathbf{f}}^k$ .

▪ Repetir

$$\tilde{\mathbf{f}}_{i+1}^{k+1} = \tilde{\mathbf{f}}_i^k - \left( \beta^{k+1} \mathbf{I} + \mathbf{A}^{k+1} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}_i^k} \right)^{-1} \left[ \left( \beta^{k+1} \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{H}} + \mathbf{A}^{k+1} \mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{f}}_i^k} \right) \tilde{\mathbf{f}}_i^k - \beta^{k+1} \tilde{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{g}} \right]$$

hasta que  $\frac{\|\tilde{\mathbf{f}}_{i+1}^{k+1} - \tilde{\mathbf{f}}_i^{k+1}\|}{\|\tilde{\mathbf{f}}_i^{k+1}\|} < \rho_2$ .

▪  $\tilde{\mathbf{f}}^{k+1} = \tilde{\mathbf{f}}_{i+1}^{k+1}$ .

hasta que  $\frac{\|\tilde{\mathbf{f}}^{k+1} - \tilde{\mathbf{f}}^k\|}{\|\tilde{\mathbf{f}}^k\|} < \rho_1$ .

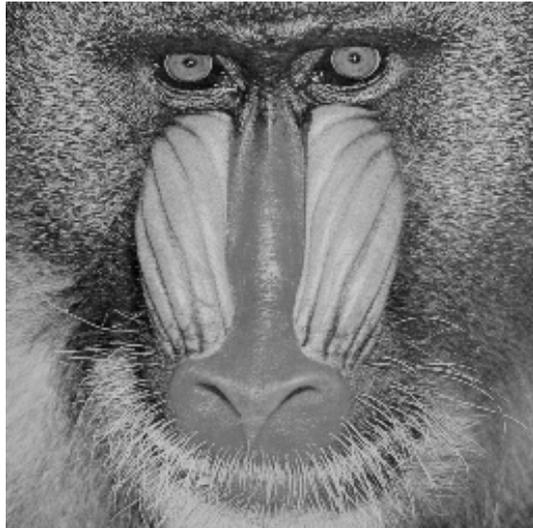
### 3.7. Resultados experimentales

Vamos a hacer uso de tres imágenes frecuentemente empleadas como banco de pruebas en problemas de restauración de imágenes, caracterizadas por diferentes niveles de actividad espacial, esto es, con diferente cantidad de pequeños detalles. En la figura 3.4 se muestran estas imágenes: *mandril* (alta actividad espacial), *puerto* (actividad espacial media) y *lena* (baja actividad espacial). Las tres imágenes han sido digitalizadas a 8 bits por píxel.

El algoritmo propuesto se ha ejecutado sobre cada una de estas imágenes, degradadas de acuerdo al modelo de formación descrito en la sección 2.2, con emborronamiento por movimiento horizontal de 9 píxeles y emborronamiento por desenfoque con radio  $R = 4,5$  (véase la sección 2.2.1) y ruido gaussiano aditivo con diferentes varianzas para obtener SNRs de 10dB, 20dB, 30dB y 40dB (véase la ecuación (2.30)). Todos los resultados que se muestran a continuación corresponden al parámetro  $p = 1,1$  (véase la sección 3.3). Se han realizado los mismos experimentos con diferentes valores de  $p$  en el intervalo  $(1, 2]$  y se ha comprobado que no hay diferencias destacables en los resultados obtenidos.

En las tablas 3.1, 3.2 y 3.3 se muestran las estimaciones de los parámetros obtenidas mediante el algoritmo propuesto para las tres imágenes consideradas. Para poder comparar los resultados obtenidos en la estimación de los parámetros incluimos en las tablas 3.4, 3.5 y 3.6 los resultados obtenidos mediante el algoritmo bayesiano jerárquico monocanal con estimación de los parámetros por máxima verosimilitud propuesto en [93] empleando como modelo a priori  $S(\mathbf{f}) = \mathbf{f}^t \mathbf{f}$ . Se puede comprobar que en la mayoría de los casos el método propuesto en [93] infraestima la varianza del ruido, mientras que el método propuesto hace estimaciones más cercanas a los valores reales de  $\beta^{-1}$  (salvo algunos casos en los que la varianza del ruido es muy baja, en los que sobreestima ligeramente la varianza del ruido al alcanzar la convergencia).

En las tablas citadas se muestran los resultados obtenidos para las dos aproximaciones de la matriz  $\mathbf{D}_{\mathbf{f}}$  que hemos empleado para poder realizar los cálculos de las trazas involucradas en la estimación de los hiperparámetros en el dominio de las fre-



*mandril*



*puerto*



*lena*

Figura 3.4: Imágenes empleadas como banco de pruebas.

cuencias, indicadas en las ecuaciones (3.31) y (3.32). Podemos ver que el algoritmo propuesto muestra algunas diferencias en la estimación de los parámetros dependiendo de la aproximación empleada. En casi todas las ocasiones la segunda aproximación proporciona resultados algo mejores, con la excepción de algunos casos en que la severidad del ruido es muy grande (SNRs de 10dB).

En las figuras 3.5 a 3.10 podemos ver algunos de los resultados obtenidos. En la figura 3.5 podemos ver la imagen observada, degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano para obtener una SNR de 30dB, la restauración obtenida con el algoritmo propuesto en [93] y la obtenida mediante el algoritmo propuesto usando la segunda aproximación. Aunque, como puede verse en la tabla 3.7, hay pequeñas diferencias en las ISNRs obtenidas mediante las dos aproximaciones, las restauraciones obtenidas son visualmente indistinguibles. Podemos ver que la solución obtenida mediante el algoritmo propuesto elimina mejor el ruido, aunque se ha perdido parte de la información correspondiente a las fronteras de la imagen y ésta se observa algo menos resuelta. Este fenómeno se debe a los bajos valores que el método estima para las bandas  $LH$ ,  $HL$  y  $HH$ , lo que viene causado porque al minimizar la ecuación 3.11, los altos valores de  $\alpha_{uv}$ ,  $u, v \in \{l, h\}$  (que son las inversas de las varianzas) hacen que el método tienda a minimizar especialmente los términos correspondientes a las bandas de frecuencias altas. En la figura 3.6 pueden observarse resultados similares para la misma imagen de prueba con emborronamiento por desenfoque uniforme con  $R = 4,5$ .

En las figuras 3.7 y 3.8 se muestran los resultados obtenidos para la imagen *puerto* para los dos emborronamientos considerados. Podemos ver que, de nuevo, los resultados obtenidos por el algoritmo propuesto son mejores en términos de eliminación de ruido aunque de nuevo se observa que las imágenes pierden información de fronteras en el proceso de estimación, lo que se puede observar especialmente en esta imagen por sus características particulares. Estas características también hacen que se produzca un fenómeno de *ringing*, debido a la alta correlación existente entre las bandas de la transformada wavelet y al hecho de que en las bandas de frecuencias altas algunas de las fronteras han sido eliminadas.

En las figuras 3.9 y 3.10 podemos ver las restauraciones obtenidas para la imagen

*lena*. Además de la diferencia en la ISNR que podemos observar en la tabla 3.9, resulta claramente perceptible la diferencia de calidad obtenida respecto al algoritmo que estamos considerando para realizar las comparaciones. Aunque a primera vista da la sensación de que el algoritmo propuesto genera mayor *ringing*, un estudio más exhaustivo de las imágenes muestra que este fenómeno está presente en las restauraciones estimadas por los dos algoritmos, pero en las figuras 3.9.b y 3.10.b está parcialmente oculto por el ruido dominante en las restauraciones estimadas.

Podemos concluir a partir de los resultados obtenidos que la introducción de la descomposición multibanda en el algoritmo de restauración aporta una clara mejora, tanto desde el punto de vista de métricas objetivas (ISNR), como desde el de la percepción visual. Sin embargo, aún observamos algunas deficiencias en el comportamiento del algoritmo propuesto, especialmente con respecto al tratamiento de las bandas altas. Debemos observar que las bandas generadas por la transformada wavelet poseen características bien diferentes. La banda baja, recordemos, es una versión “suavizada” y submuestreada de la imagen, mientras que las bandas altas ( $LH$ ,  $HL$  y  $HH$ ) contienen información de fronteras a partir de diferencias entre píxeles, por lo que su rango se encuentra típicamente alrededor del cero con una varianza relativamente pequeña. Este hecho hace que las trazas y las normas involucradas en el cálculo de  $\alpha_{uv}$ ,  $u, v \in \{l, h\}$  (mediante la ecuación (3.30)) den lugar a estimaciones de las varianzas muy bajas, lo que conduce a la eliminación de información sobre las fronteras en las restauraciones obtenidas. Además, el ruido, que es ruido blanco y que por lo tanto se distribuye por igual en todas las frecuencias, perjudica particularmente a las bandas altas debido a su reducido rango, dominando sobre la información de la señal.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, se han realizado varios experimentos en los que se ha empleado un único parámetro para todas las bandas, esto es,  $\alpha_{uv} = \alpha$ ,  $u, v \in \{l, h\}$ , con el objeto de asignar una varianza mayor a las bandas de altas frecuencias y preservar mejor la información de las fronteras de la imagen. Se ha comprobado que los resultados eran algo mejores que los obtenidos con el algoritmo propuesto con niveles muy bajos de ruido (SNRs de 40dB), pero cuando el ruido era moderado o alto ( $\text{SNR} \leq 30\text{dB}$ ) el hecho de introducir mayores varianzas en las bandas altas producía

peores resultados, ya que a la vez que se intenta preservar la información de fronteras se introduce también un mayor nivel de ruido, generando restauraciones más resueltas, pero más ruidosas.

En las figuras 3.11, 3.12 y 3.13 se muestran gráficas de convergencia del algoritmo propuesto para las tres imágenes de prueba consideradas con emborronamiento por movimiento lineal y diferentes niveles de ruido. En todos los casos se puede comprobar que el algoritmo requiere un número reducido iteraciones para alcanzar el criterio de convergencia, descendiendo rápidamente el valor del criterio en las primeras iteraciones (típicamente, menos de 5).

Hemos realizado también experimentos para comparar los resultados obtenidos con el algoritmo 3.2 propuesto en esta memoria con los del algoritmo 3.1 propuesto por Belge *et al.*, para lo que hemos reproducido uno de los experimentos incluidos en [14]. En la figura 3.14 se muestra la imagen *mandril* degradada con emborronamiento gaussiano con  $\sigma = 2$  y ruido gaussiano (SNR = 30dB) y las restauraciones obtenidas por ambos algoritmos. En la tabla 3.10 se muestra la raíz del error cuadrático medio (*RMSE: Root Mean Square Error*, definido como

$$\text{RMSE} = \sqrt{(1/MN) \|\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}\|^2}, \quad (3.34)$$

para las dos restauraciones obtenidas. Podemos ver que se obtienen mejores resultados para el algoritmo 3.2 propuesto en esta memoria, lo que se puede apreciar visualmente en las zonas de altas frecuencias de la imagen, como los bigotes del mandril o las franjas del hocico, que se conservan mejor en la restauración obtenida por nuestro método.

Emborronamiento	SNR (varianza)	Aproximación	$\beta^{-1}$	$\alpha_{LL}^{-1}$	$\alpha_{LH}^{-1}$	$\alpha_{HL}^{-1}$	$\alpha_{HH}^{-1}$
Movimiento $L = 9$	40dB (0,11)	Aprox. 1	3,35	452,24	$41 \times 10^{-6}$	20,71	$35 \times 10^{-6}$
		Aprox. 2	2,24	452,24	$8897 \times 10^{-6}$	39,7	$7498 \times 10^{-6}$
	30dB (1,0)	Aprox. 1	4,54	452,26	$46 \times 10^{-6}$	19,83	$40 \times 10^{-6}$
		Aprox. 2	2,92	452,26	$5444 \times 10^{-6}$	41,71	$4791 \times 10^{-6}$
	20dB (10,8)	Aprox. 1	18,06	452,57	$866 \times 10^{-6}$	15,40	$835 \times 10^{-6}$
		Aprox. 2	10,47	452,53	$24 \times 10^{-6}$	48,82	$23 \times 10^{-6}$
	10dB (121,0)	Aprox. 1	191,28	456,31	0,053	0,18	0,053
		Aprox. 2	169,62	579,40	$446 \times 10^{-6}$	0,34	$446 \times 10^{-6}$
Desenfoque $R = 4,5$	40dB (0,09)	Aprox. 1	0,93	452,28	0,094	0,1	0,046
		Aprox. 2	0,93	452,28	0,094	0,1	0,046
	30dB (1,0)	Aprox. 1	1,88	452,49	0,12	0,13	0,0878
		Aprox. 2	1,88	452,53	0,12	0,13	0,0878
	20dB (9,0)	Aprox. 1	10,28	454,23	0,27	0,27	0,25
		Aprox. 2	10,27	454,58	0,27	0,27	0,25
	10dB (100,0)	Aprox. 1	104,45	471,26	0,93	0,93	0,94
		Aprox. 2	86,04	747,15	0,51	0,51	0,51

Tabla 3.1: Estimación de parámetros del algoritmo propuesto para la imagen *mandril*.

Emborronamiento	SNR (varianza)	Aproximación	$\beta^{-1}$	$\alpha_{LL}^{-1}$	$\alpha_{LH}^{-1}$	$\alpha_{HL}^{-1}$	$\alpha_{HH}^{-1}$
Movimiento $L = 9$	40dB (0,16)	Aprox. 1	1,42	429,52	$307 \times 10^{-6}$	21,35	$192 \times 10^{-6}$
		Aprox. 2	1,05	429,52	0,02	34,17	0,013
	30dB (1,44)	Aprox. 1	2,86	429,56	$226 \times 10^{-6}$	21,21	$170 \times 10^{-6}$
		Aprox. 2	2,01	429,56	0,027	38,26	0,02
	20dB (16,0)	Aprox. 1	20,17	430,0	$5741 \times 10^{-6}$	20,10	$5393 \times 10^{-6}$
		Aprox. 2	12,92	430,24	$159 \times 10^{-6}$	51,67	$149 \times 10^{-6}$
10dB (144,0)	Aprox. 1	294,25	435,11	$484 \times 10^{-6}$	0,099	$481 \times 10^{-6}$	
	Aprox. 2	107,55	601,75	$7 \times 10^{-6}$	42,67	$7 \times 10^{-6}$	
Desenfoque $R = 4,5$	40dB (0,12)	Aprox. 1	0,83	429,57	0,043	0,064	0,016
		Aprox. 2	0,83	429,61	0,043	0,064	0,017
	30dB (1,21)	Aprox. 1	2,01	429,86	0,12	0,15	0,085
		Aprox. 2	2,01	430,00	0,12	0,15	0,085
	20dB (12,25)	Aprox. 1	13,55	432,47	0,17	0,18	0,16
		Aprox. 2	13,49	434,97	0,31	0,32	0,29
10dB (121,0)	Aprox. 1	125,98	453,05	0,57	0,57	0,57	
	Aprox. 2	100,41	813,75	0,095	0,095	0,095	

Tabla 3.2: Estimación de parámetros del algoritmo propuesto para la imagen *puerto*

Emborronamiento	SNR (varianza)	Aproximación	$\beta^{-1}$	$\alpha_{LL}^{-1}$	$\alpha_{LH}^{-1}$	$\alpha_{HL}^{-1}$	$\alpha_{HH}^{-1}$
Movimiento $L = 9$	40dB (0,20)	Aprox. 1	1,28	338,48	$1 \times 10^{-6}$	2,82	0,00
		Aprox. 2	0,763	338,49	$10 \times 10^{-6}$	8,29	$4 \times 10^{-6}$
	30dB (1,96)	Aprox. 1	7,87	$338,62 \times 10^{-6}$	$5159 \times 10^{-6}$	0,044	$3267 \times 10^{-6}$
		Aprox. 2	2,39	338,68	0,00	6,61	0,00
	20dB (20,25)	Aprox. 1	26,27	339,67	0,13	0,15	0,12
		Aprox. 2	24,96	371,69	0,07	0,13	0,06
	10dB (196,0)	Aprox. 1	203,93	346,63	0,41	0,38	0,41
		Aprox. 2	162,97	594,73	0,12	0,14	0,12
Desenfoque $R = 4,5$	40dB (0,20)	Aprox. 1	0,45	338,52	0,063	0,034	0,018
		Aprox. 2	0,45	338,61	0,063	0,034	0,018
	30dB (1,96)	Aprox. 1	2,25	339,06	0,049	0,037	0,03
		Aprox. 2	2,24	342,83	0,090	0,068	0,059
	20dB (20,25)	Aprox. 1	21,37	344,44	0,12	0,12	0,12
		Aprox. 2	18,68	453,60	0,12	0,12	0,12
	10dB (196,0)	Aprox. 1	202,45	374,84	0,74	0,73	0,74
		Aprox. 2	158,133	762,34	$6205 \times 10^{-6}$	$6154 \times 10^{-6}$	$6216 \times 10^{-6}$

Tabla 3.3: Estimación de parámetros del algoritmo propuesto para la imagen *lena*

Emborronamiento	SNR (varianza)	$\beta^{-1}$	$\alpha^{-1}$
Movimiento $L = 9$	40dB (0,11)	0,24	18862,72
	30dB (1,0)	0,59	19484,30
	20dB (10,8)	5,30	22236,89
	10dB (121,0)	66,17	24689,10
Desenfoque $R = 4,5$	40dB (0,09)	0,51	19641,34
	30dB (1,0)	0,51	22699,82
	20dB (9,0)	5,03	32320,03
	10dB (100,0)	68,51	67828,34

Tabla 3.4: Estimación de parámetros del algoritmo monocanal para la imagen *mandril*.

Emborronamiento	SNR (varianza)	$\beta^{-1}$	$\alpha^{-1}$
Movimiento $L = 9$	40dB (0,16)	0,23	17609,14
	30dB (1,44)	0,76	18384,83
	20dB (16,0)	7,85	21731,71
	10dB (144,0)	79,88	32359,97
Desenfoque $R = 4,5$	40dB (0,12)	0,06	18526,78
	30dB (1,21)	0,062	21742,67
	20dB (12,25)	7,00	33105,03
	10dB (121,0)	84,86	69927,62

Tabla 3.5: Estimación de parámetros del algoritmo monocanal para la imagen *puerto*

emborronamiento	SNR (varianza)	$\beta^{-1}$	$\alpha^{-1}$
Movimiento $L = 9$	40dB (0,20)	0,21	12798,54
	30dB (1,96)	0,97	13635,79
	20dB (20,25)	10,20	16862,68
	10dB (196,0)	114,98	27803,34
Desenfoque $R = 4,5$	40dB (0,20)	0,10	13934,54
	30dB (1,96)	1,03	17530,00
	20dB (20,25)	12,36	30382,10
	10dB (196,0)	147,55	69494,16

Tabla 3.6: Estimación de parámetros del algoritmo monocanal para la imagen *lena*.

Emborronamiento	SNR (varianza)	Aprox. 1	Aprox. 2	Monocanal
Movimiento $L = 9$	40dB (0,16)	3,073	3,141	7,902
	30dB (1,44)	2,384	2,941	0,588
	20dB (16,0)	1,156	1,274	-5,371
	10dB (144,0)	-3,967	-4,034	-9,814
Desenfoque $R = 4,5$	40dB (0,12)	1,686	1,686	0,633
	30dB (1,21)	1,538	1,538	-4,903
	20dB (12,25)	0,120	0,120	-9,535
	10dB (121,0)	-5,382	-5,500	-13,066

Tabla 3.7: ISNRs obtenidos para la imagen *mandril* con el algoritmo propuesto (2 aproximaciones) y el algoritmo monocanal.

Emborronamiento	SNR (varianza)	Aprox. 1	Aprox. 2	Monocanal
Movimiento $L = 9$	40dB (0,16)	3,884	3,878	4,016
	30dB (1,44)	3,361	3,311	-2,720
	20dB (16,0)	0,060	-0,217	-8,412
	10dB (144,0)	-5,635	-5,829	-11,690
Desenfoque $R = 4,5$	40dB (0,12)	2,442	2,442	-0,731
	30dB (1,21)	2,185	2,185	-5,835
	20dB (12,25)	-0,167	-0,168	-10,602
	10dB (121,0)	-6,153	-6,389	-13,550

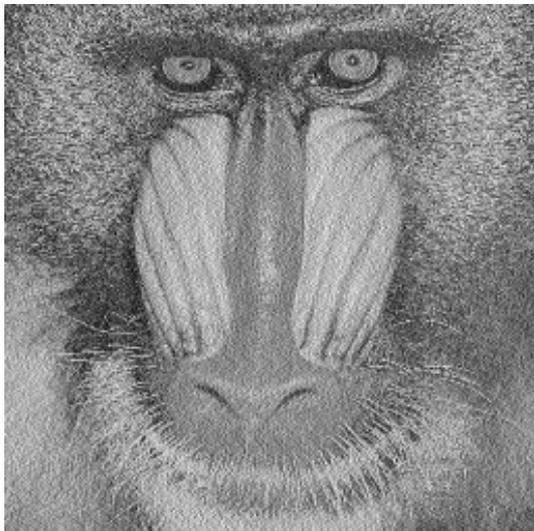
Tabla 3.8: ISNRs obtenidos para la imagen *puerto* con el algoritmo propuesto (2 aproximaciones) y el algoritmo monocanal.

Emborronamiento	SNR (varianza)	Aprox. 1	Aprox. 2	Monocanal
Movimiento $L = 9$	40dB (0,16)	5,149	5,308	3,703
	30dB (1,44)	4,152	4,539	-2,833
	20dB (16,0)	0,323	0,305	-8,080
	10dB (144,0)	-5,342	-5,780	-10,925
Desenfoque $R = 4,5$	40dB (0,12)	4,734	4,734	-3,527
	30dB (1,21)	3,481	3,482	-8,467
	20dB (12,25)	-1,985	-2,038	-12,847
	10dB (121,0)	-7,971	-8,627	-14,233

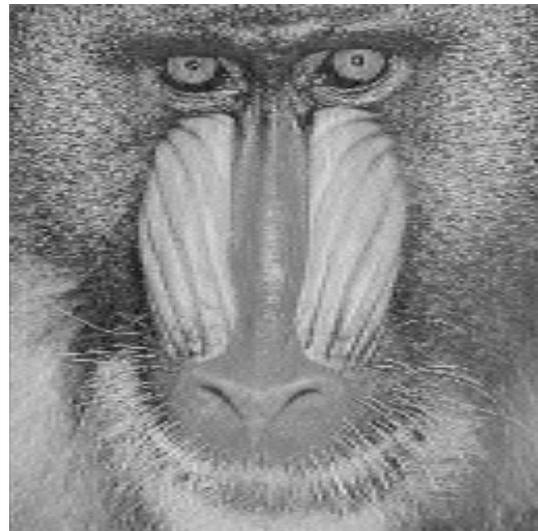
Tabla 3.9: ISNRs obtenidos para la imagen *lena* con el algoritmo propuesto (2 aproximaciones) y el algoritmo monocanal.



(a)

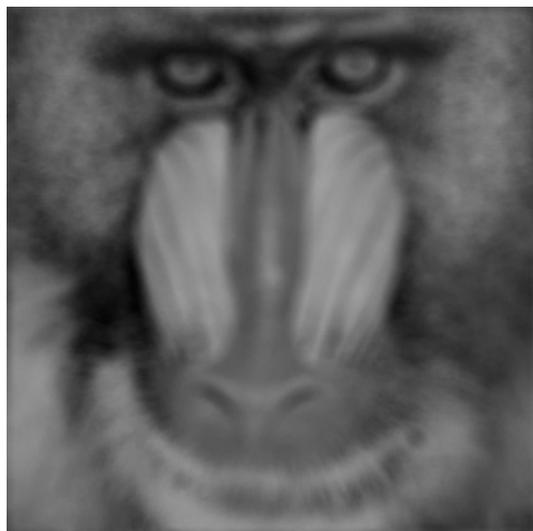


(b)

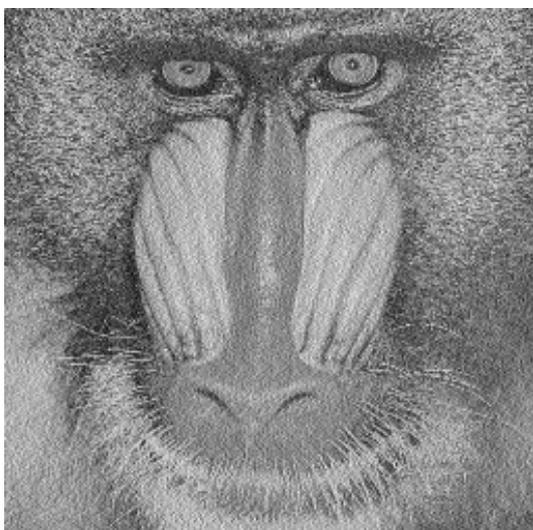


(c)

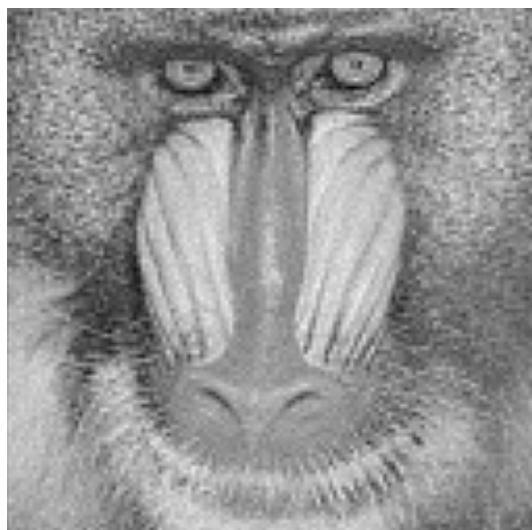
Figura 3.5: (a) Imagen *mandril* degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto



(a)



(b)

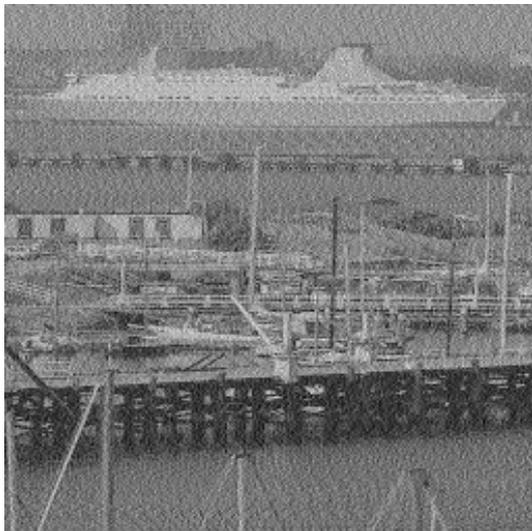


(c)

Figura 3.6: (a) Imagen *mandril* degradada por emborronamiento por desenfoque uniforme y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto



(a)



(b)



(c)

Figura 3.7: (a) Imagen *puerto* degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto



(a)



(b)



(c)

Figura 3.8: (a) Imagen *puerto* degradada por emborronamiento por desenfoque uniforme y ruido gaussiano ( $SNR = 40dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto



(a)

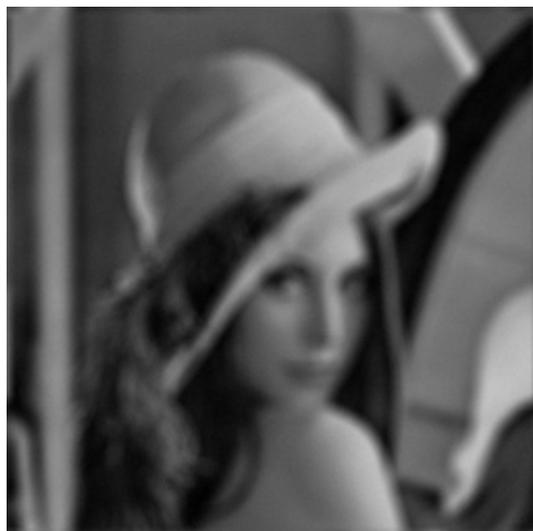


(b)



(c)

Figura 3.9: (a) Imagen *lena* degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto



(a)



(b)



(c)

Figura 3.10: (a) Imagen *lena* degradada por emborronamiento por desenfoque uniforme y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto

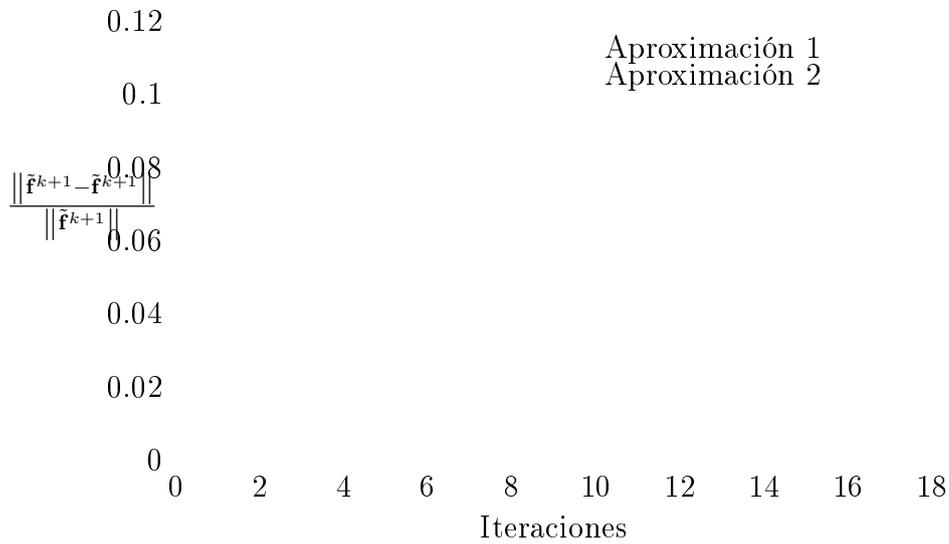


Figura 3.11: Convergencia del algoritmo propuesto para la imagen *mandril* degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano (SNR = 30dB).

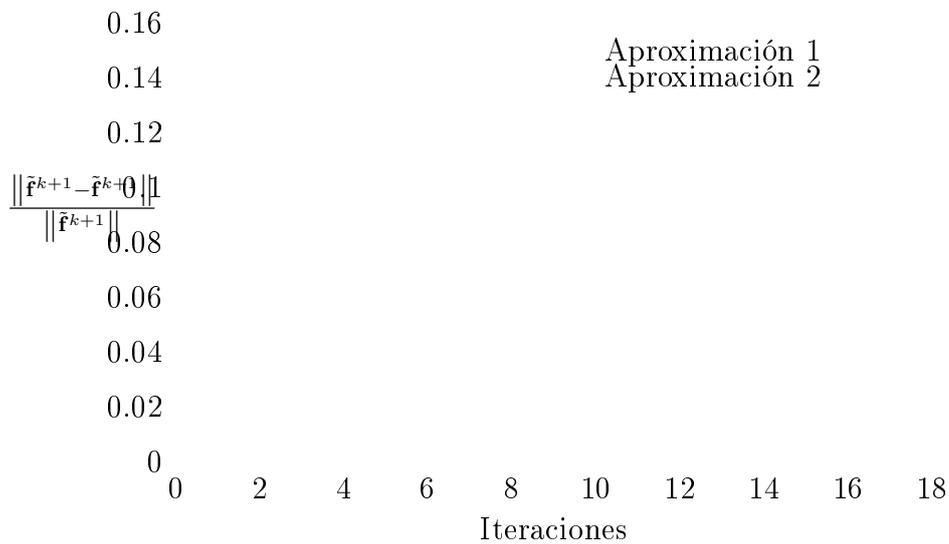


Figura 3.12: Convergencia del algoritmo propuesto para la imagen *puerto* degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano (SNR = 20dB).

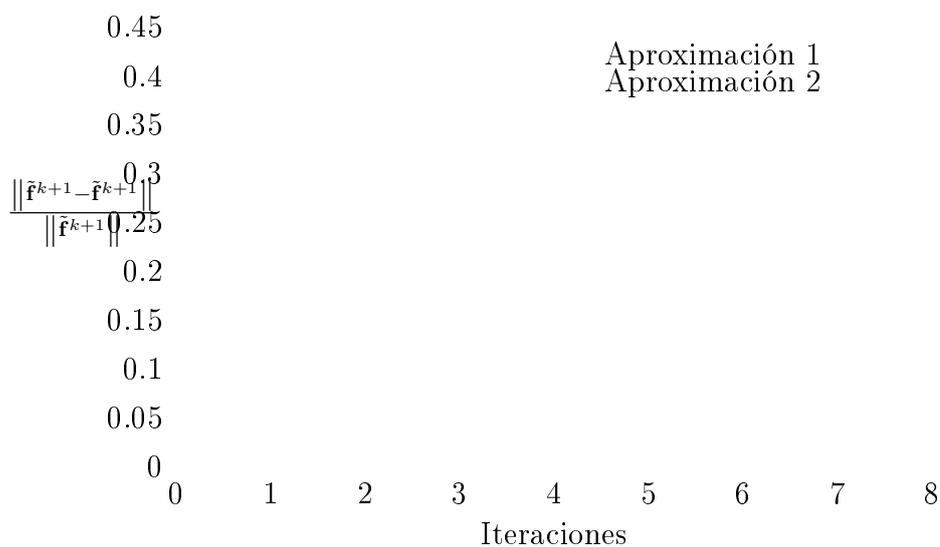


Figura 3.13: Convergencia del algoritmo propuesto para la imagen *lena* degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano (SNR = 20dB).

Algoritmo	RMSE
Algoritmo 3.1 propuesto por Belge <i>et al.</i> ([14])	23,75
Algoritmo 3.2 propuesto en esta memoria	22,61

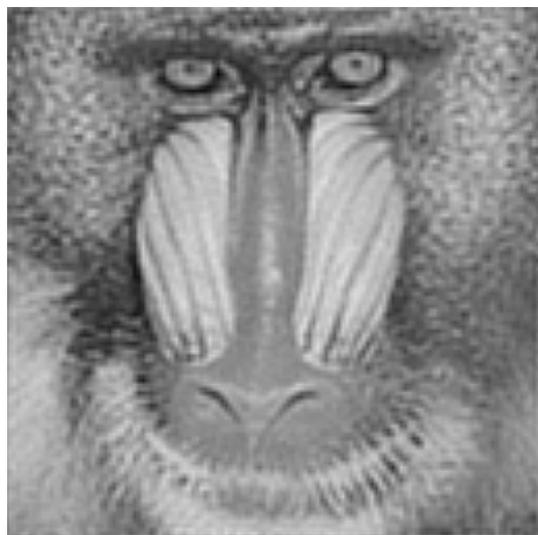
Tabla 3.10: RMSE obtenido para la imagen *mandril* de la figura 3.14 para los dos algoritmos de restauración multicanal considerados.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.14: (a) Imagen *mandril* degradada por emborronamiento gaussiano con  $\sigma = 2$  y ruido gaussiano (SNR = 30dB), (b) Restauración con el algoritmo 3.1 propuesto por Belge *et al.*, (c) Restauración con el algoritmo 3.2 propuesto



## Capítulo 4

# Restauración de imágenes mediante la descomposición wavelet de modelos de imagen autorregresivos

Le rodean sin piedad sus conclusiones,  
sólo algunas le recrean la verdad.

Antonio Vega (1957– )

### 4.1. Introducción

Como es conocido en restauración de imágenes, podemos imponer restricciones de suavidad sobre la imagen original mediante el uso de modelos autorregresivos como modelo de imagen en la aplicación del paradigma jerárquico bayesiano a la restauración de imágenes.

Vamos a estudiar en este capítulo la descomposición subbanda de estos modelos de imagen cuadráticos y su uso para modelizar la imagen original dentro de la aplicación del paradigma jerárquico bayesiano a la restauración de imágenes digitales desde una perspectiva multicanal.

Puesto que al realizar una descomposición subbanda estamos extrayendo diferentes regiones (canales) de frecuencias de una imagen, el proceso de asociar un hiperparámetro

diferente a cada una de las subbandas del modelo de imagen es equivalente a asignar diferentes hiperparámetros a las diferentes bandas de frecuencia de la imagen. Estos hiperparámetros reflejarán por lo tanto la actividad de esa banda en la imagen original. Analizaremos cómo se puede realizar la estimación de estos parámetros dentro del paradigma bayesiano de restauración de imágenes.

En las siguientes secciones definiremos en primer lugar los modelos de imagen y de degradación de forma que podamos aplicar el paradigma bayesiano desde una perspectiva multicanal del problema de la restauración. Para estos modelos, se realizará a continuación la estimación de los hiperparámetros y de la imagen.

El capítulo termina con la aplicación de estos métodos y su comparación con modelos monocanal en imágenes reales.

## 4.2. Modelo de imagen multicanal

Como ya hemos descrito en la sección 2.4, el paradigma bayesiano se caracteriza por hacer uso de información a priori sobre las imágenes que estamos tratando, que suele contener información espacial que refleja nuestro conocimiento sobre la distribución de las intensidades de luz de los objetos de la imagen original, la que se captaría en condiciones ideales. Ese conocimiento puede incluir información sobre “suavidad” de la imagen, preservación de fronteras o sobre la distribución de las intensidades de luz de la imagen, entre otras.

Antes de definir el modelo de imagen multicanal que vamos a utilizar en este capítulo, es preciso formular los modelos de imagen monocanal en los que se basa, puesto que, como veremos a continuación, el modelo propuesto se formula como su extensión multicanal.

Aunque podríamos trabajar con cualquier modelo a priori cuadrático sobre  $\mathbf{f}$ , vamos a considerar dos modelos concretos, los autorregresivos condicional y simultáneo, modelos que se han venido aplicando a problemas de restauración de imágenes (véanse, por ejemplo, [1], [94], [98], [102] y [103]). Estos modelos no generan imágenes típicas, sino que modelizan el comportamiento local de las imágenes típicas.

El modelo condicional autorregresivo (*CAR: Conditional AutoRegressive*) ([108], [128]) para  $\mathbf{f}$  viene dado por

$$p(\mathbf{f}|\alpha) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha \mathbf{f}^t (I - \mathbf{C}) \mathbf{f} \right\}, \quad (4.1)$$

con  $\mathbf{C} = \phi \mathbf{N}$ , donde  $|\phi| < 1/4$  y  $\mathbf{N}$  es la matriz de incidencia, que se define de la siguiente forma:

$$\mathbf{N} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ y } j \text{ son píxeles vecinos a distancia 1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.2)$$

de manera que el modelo condicional autorregresivo se puede definir como

$$p(\mathbf{f}|\alpha) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha \mathbf{f}^t (I - \phi \mathbf{N}) \mathbf{f} \right\}, \quad (4.3)$$

donde  $\alpha^{-1} = \sigma_{\mathbf{f}}^2$  es la varianza a priori desconocida, que determinará la suavidad de la “verdadera” imagen. El término  $\mathbf{f}^t (I - \phi \mathbf{N}) \mathbf{f}$  representa en notación matricial la suma de los cuadrados de los valores  $\mathbf{f}_i$  menos  $\phi$  veces la suma de  $\mathbf{f}_i \mathbf{f}_j$  para píxeles vecinos,  $i$  y  $j$ , de manera que podemos interpretar los parámetros a partir de las siguientes expresiones que describen la distribución condicional:

$$E(\mathbf{f}_i | \mathbf{f}_j, j \neq i) = \phi \sum_{j \text{ vec } i} \mathbf{f}_j, \quad (4.4)$$

$$\text{var}(\mathbf{f}_i | \mathbf{f}_j, j \neq i) = \alpha^{-1} = \sigma_{\mathbf{f}}^2, \quad (4.5)$$

donde el sufijo “ $j$  vec  $i$ ” indica que el píxel  $j$  es vecino del píxel  $i$ , denotando los cuatro píxeles vecinos a distancia 1 del píxel  $i$ .

Considerando una corrección toroidal, los autovalores de la matriz  $I - \phi \mathbf{N}$  son

$$\lambda_{ij} = 1 - 2\phi \left[ \cos \left( 2\pi \frac{i}{M} \right) + \cos \left( 2\pi \frac{j}{N} \right) \right], \quad i = 0, \dots, M-1, j = 0, \dots, N-1, \quad (4.6)$$

por lo que la densidad de  $\mathbf{f}$  tiene la forma

$$p(\mathbf{f}|\alpha) = \frac{1}{Z_{prior}(\alpha)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha \mathbf{f}^t (I - \phi \mathbf{N}) \mathbf{f} \right\}, \quad (4.7)$$

donde  $Z_{prior}(\alpha) = \left( \prod_{i,j} \lambda_{ij} \right)^{-1/2} (2\pi/\alpha)^{p/2}$ ,  $p = M \times N$ , el tamaño de la imagen.

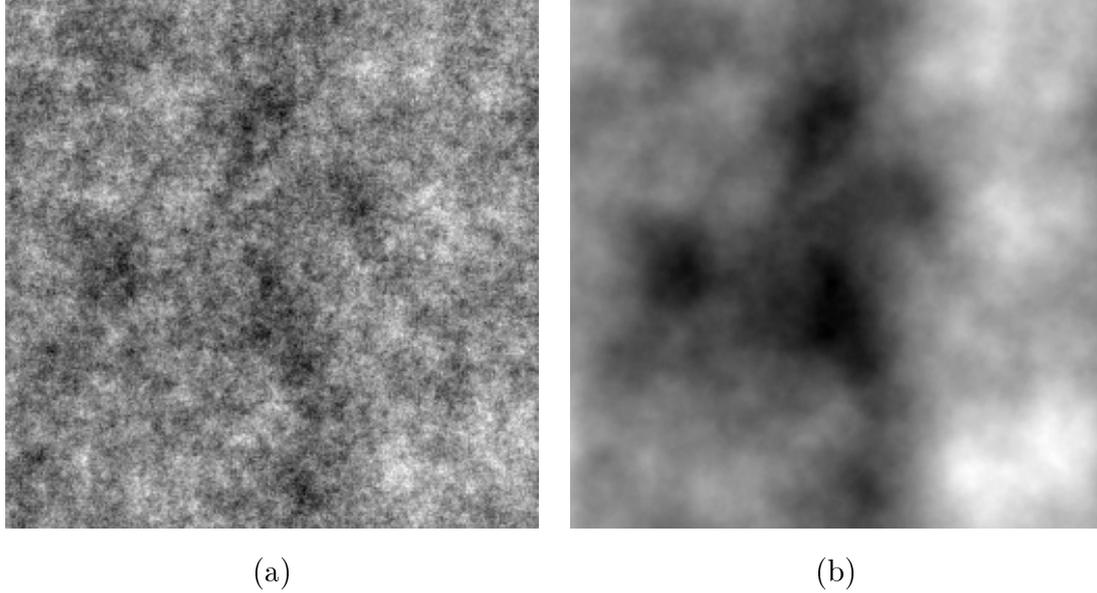


Figura 4.1: Realizaciones de los modelos autorregresivos: (a) Condicional Autorregresivo (CAR) (b) Simultáneo Autorregresivo (SAR).

También consideraremos el modelo autorregresivo simultáneo (*SAR: Simultaneous AutoRegressive*), caracterizado por

$$p(\mathbf{f}|\alpha) = \frac{1}{Z_{prior}(\alpha)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha \mathbf{f}^t (I - \phi \mathbf{N})^t (I - \phi \mathbf{N}) \mathbf{f} \right\}, \quad (4.8)$$

donde para este modelo tenemos  $Z_{prior}(\alpha) = (\prod_{i,j} \lambda_{ij}^2)^{-1/2} (2\pi/\alpha)^{p/2}$  ([128]), con  $p = M \times N$  y  $\lambda_{ij}$  definidos en (4.6). En la figura 4.1 pueden verse dos realizaciones de los modelos descritos.

Como acabamos de ver, una forma sencilla de incorporar la suavidad en la luminosidad del objeto es modelizar la distribución de  $\mathbf{f}$  mediante (4.8). Es importante destacar que este modelo es una autorregresión simultánea (SAR) ([128]) y que está caracterizado por

$$(\mathbf{Cf})_i = \epsilon_i, \quad (4.9)$$

donde los  $\epsilon_i$  son independientes  $\sim \mathcal{N}(0, \alpha^{-1})$ .

Un estudio en profundidad de la ecuación (4.9) demuestra que esta expresión no es

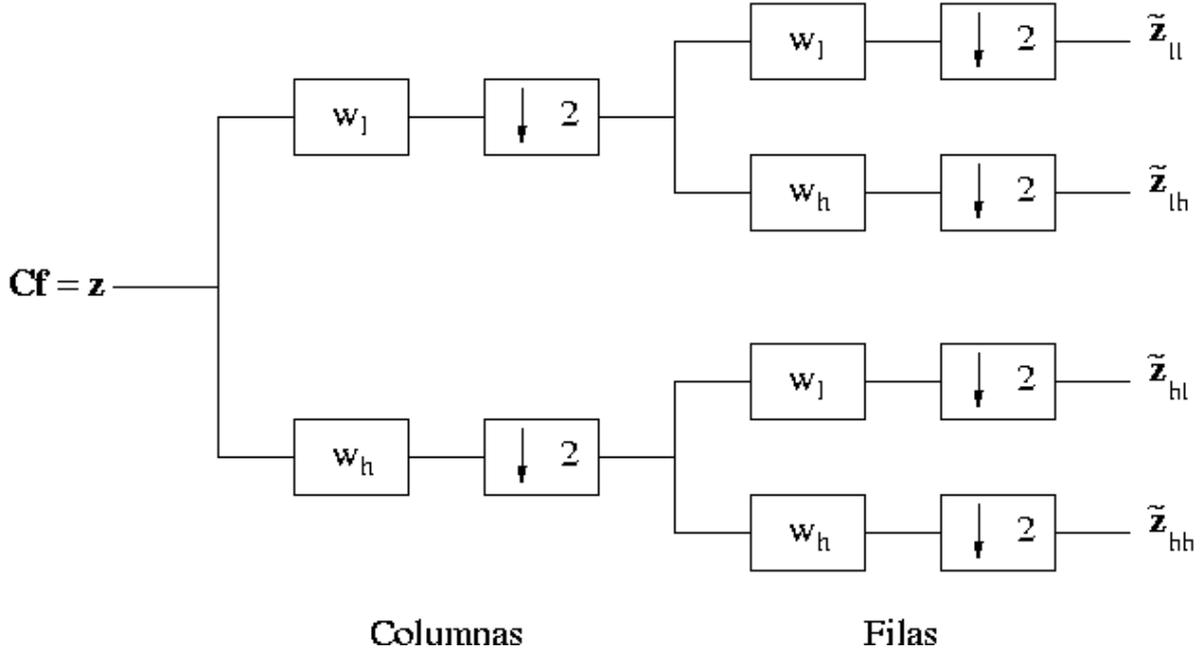


Figura 4.2: Descomposición wavelet 2-D del modelo de imagen en cuatro canales

verdadera para imágenes reales. El espectro de  $\mathbf{Cf}$  normalmente no es plano y la energía en cada frecuencia no es la misma (igual a  $\alpha^{-1}$ ). Obviamente, este modelo de imagen es sólo una aproximación simple.

Consideremos ahora  $\mathbf{z} = \mathbf{Cf}$  y realicemos una descomposición multicanal sobre ella. Sean  $\mathbf{w}_l$  y  $\mathbf{w}_h$  filtros especulares en cuadratura (QMF) 1- $D$  basados en las bases wavelet ortonormales de soporte compacto ([41]), de forma que se puede emplear un conjunto de coeficientes para definir el otro ([147]). Entonces, la descomposición subbanda de  $\mathbf{z}$  se puede calcular como se describe en la figura 4.2.

Obsérvese que

$$\mathbf{W}_{ll}^t \mathbf{W}_{ll} + \mathbf{W}_{hl}^t \mathbf{W}_{hl} + \mathbf{W}_{lh}^t \mathbf{W}_{lh} + \mathbf{W}_{hh}^t \mathbf{W}_{hh} = \mathbf{I}, \quad (4.10)$$

además,

$$\mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{ij} = 0, \quad \text{si } uv \neq ij, \quad (4.11)$$

donde  $\mathbf{W}_{uv}$ ,  $u, v \in \{l, h\}$ , son las matrices de coeficientes de tamaño  $[(M/2) \times (N/2)] \times [M \times N]$  empleadas para obtener las bandas  $\tilde{\mathbf{z}}_{uv}$  (véase la figura 4.2). Es importante

observar que ahora  $\tilde{\mathbf{z}}_{uv} = \mathbf{W}_{uv}\mathbf{z}$ ,  $u, v \in \{l, h\}$ , contiene información sobre una parte del espectro de  $\mathbf{z}$ .

Consideremos la forma cuadrática que define el modelo de imagen. Podemos ver que

$$\begin{aligned} \alpha \|\mathbf{Cf}\|^2 &= \alpha \mathbf{f}^t \mathbf{C}^t \mathbf{C} \mathbf{f} \\ &= \mathbf{f}^t \mathbf{C}^t (\alpha \mathbf{W}_{ll}^t \mathbf{W}_{ll} + \alpha \mathbf{W}_{lh}^t \mathbf{W}_{lh} + \alpha \mathbf{W}_{hl}^t \mathbf{W}_{hl} + \alpha \mathbf{W}_{hh}^t \mathbf{W}_{hh}) \mathbf{C} \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para adaptar el modelo de imagen a un enfoque multicanal, y de esta forma incluir un hiperparámetro para cada uno de los canales descompuestos, definimos el siguiente modelo de imagen

$$\begin{aligned} p(\mathbf{f}|\underline{\alpha}) &\propto \frac{1}{Z_{prior}(\underline{\alpha})} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{u,v \in \{u,v\}} \alpha_{uv} \|\tilde{\mathbf{z}}_{uv}\|^2 \right] \\ &\propto \frac{1}{Z_{prior}(\underline{\alpha})} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \|\mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \mathbf{f}\|^2 \right], \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde  $\underline{\alpha}$  denota el vector de parámetros  $(\alpha_{ll}, \alpha_{lh}, \alpha_{hl}, \alpha_{hh})$ ,

$$Z_{prior}(\underline{\alpha}) = \det \left[ \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right]^{-1/2} \quad (4.14)$$

y  $\det[\cdot]$  denota el determinante.

Debemos observar que el modelo que hemos propuesto puede extenderse a una descomposición en  $4^i$  canales. Sin embargo, por simplicidad de notación, sólo emplearemos la descomposición en cuatro canales. También es importante destacar que el modelo que estamos proponiendo permite el uso del mismo hiperparámetro para varias subbandas.

### 4.3. Modelo de degradación

Como hemos descrito en el capítulo anterior, si consideramos el modelo de formación de imágenes de la ecuación (2.2), con ruido gaussiano aditivo independiente de la señal, podemos escribir el modelo de degradación como

$$p(\mathbf{g}|\mathbf{f}, \beta) \propto \beta^{\frac{MN}{2}} \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta \|\mathbf{g} - \mathbf{H} \mathbf{f}\|^2 \right], \quad (4.15)$$

donde  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{f}$  son la imagen observada, la matriz de emborronamiento y la imagen original, respectivamente.

## 4.4. Modelo de hiperparámetros

También vamos a hacer uso de distribuciones no informativas a priori sobre los hiperparámetros, de la misma forma que en el capítulo anterior:

$$\begin{aligned} p(\alpha) &\propto \text{const} > 0 \\ p(\beta) &\propto \text{const} > 0, \end{aligned} \tag{4.16}$$

lo que nos permitirá aplicar el paradigma bayesiano sin disponer de información sobre los hiperparámetros del problema.

## 4.5. Restauración basada en la evidencia usando modelos autorregresivos multicanal

Una vez descritos en las secciones anteriores los modelos de imagen, de degradación y de los hiperparámetros, en esta sección procederemos a aplicar el paradigma jerárquico bayesiano para obtener un algoritmo que realice simultáneamente la estimación de la imagen original y de los parámetros.

Siguiendo el enfoque basado en la evidencia del paradigma bayesiano descrito en la sección 2.4.2.2, los pasos que vamos a seguir para realizar la estimación de los hiperparámetros y de la imagen original son los siguientes:

### 4.5.1. Paso de estimación de los hiperparámetros

Seleccionaremos  $\hat{\underline{\alpha}} = (\hat{\alpha}_{ll}, \hat{\alpha}_{lh}, \hat{\alpha}_{hl}, \hat{\alpha}_{hh})$  y  $\hat{\beta}$  como los estimadores de máxima verosimilitud (recordemos que estamos considerando distribuciones impropias para los hiperparámetros, como hemos indicado en la sección 4.4) de  $\underline{\alpha}$  y  $\beta$  a partir de  $p(\underline{\alpha}, \beta | \mathbf{g})$ , esto

es :

$$\hat{\underline{\alpha}}, \hat{\beta} = \arg \max_{\underline{\alpha}, \beta} p(\underline{\alpha}, \beta | \mathbf{g}), \quad (4.17)$$

donde

$$p(\underline{\alpha}, \beta | \mathbf{g}) \propto p(\mathbf{g} | \underline{\alpha}, \beta) = \int_{\mathbf{f}} p(\mathbf{f} | \underline{\alpha}) p(\mathbf{g} | \mathbf{f}, \beta) d\mathbf{f} \quad (4.18)$$

Si nuestro modelo de imagen es el definido en (4.13) y el modelo de degradación es el descrito en (4.15), tendremos

$$\begin{aligned} p(\mathbf{f}, \mathbf{g} | \underline{\alpha}, \beta) &\propto \beta^{\frac{MN}{2}} \times \det \left[ \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 \right] \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \|\mathbf{W}_{uv} \mathbf{C}\mathbf{f}\|^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Por lo tanto, integrando  $p(\mathbf{f}, \mathbf{g} | \underline{\alpha}, \beta)$  en  $\mathbf{f}$  tendremos que

$$\begin{aligned} p(\mathbf{g} | \underline{\alpha}, \beta) &\propto \beta^{\frac{MN}{2}} \times \det \left[ \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \int_{\mathbf{f}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \|\mathbf{W}_{uv} \mathbf{C}\mathbf{f}\|^2 \right] d\mathbf{f} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Para poder resolver la integral de la expresión anterior, desarrollemos alrededor de  $\mathbf{f}^{(\underline{\alpha}, \beta)}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \beta \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \|\mathbf{W}_{uv} \mathbf{C}\mathbf{f}\|^2 &\approx \\ \frac{1}{2} \beta \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}^{(\underline{\alpha}, \beta)}\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \|\mathbf{W}_{uv} \mathbf{C}\mathbf{f}^{(\underline{\alpha}, \beta)}\|^2 & \\ -\frac{1}{2} (\mathbf{f} - \mathbf{f}^{(\underline{\alpha}, \beta)})^t \left( \beta \mathbf{H}^t \mathbf{H} + \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right) (\mathbf{f} - \mathbf{f}^{(\underline{\alpha}, \beta)}) & \end{aligned} \quad (4.21)$$

Sustituyendo en la integral de (4.20) tenemos:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbf{f}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \|\mathbf{W}_{uv} \mathbf{C}\mathbf{f}\|^2 \right] d\mathbf{f} = \\
& \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}^{(\underline{\alpha}, \beta)}\|^2 \right] \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \|\mathbf{W}_{uv} \mathbf{C}\mathbf{f}^{(\underline{\alpha}, \beta)}\|^2 \right] \\
& \times \int_{\mathbf{f}} \exp \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{f} - \mathbf{f}^{(\underline{\alpha}, \beta)})^t \left( \beta \mathbf{H}^t \mathbf{H} + \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right) (\mathbf{f} - \mathbf{f}^{(\underline{\alpha}, \beta)}) \right] d\mathbf{f} \\
& = \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}^{(\underline{\alpha}, \beta)}\|^2 \right] \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \|\mathbf{W}_{uv} \mathbf{C}\mathbf{f}^{(\underline{\alpha}, \beta)}\|^2 \right] \\
& \times \det \left[ \beta \mathbf{H}^t \mathbf{H} + \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{4.22}
\end{aligned}$$

con lo que ahora podemos obtener  $p(\underline{\alpha}, \beta | \mathbf{g})$ :

$$\begin{aligned}
p(\underline{\alpha}, \beta | \mathbf{g}) & \propto \beta^{\frac{MN}{2}} \times \det \left[ \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \times \det \left[ \beta \mathbf{H}^t \mathbf{H} + \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right]^{-\frac{1}{2}} \\
& \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \beta \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 \right] \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \|\mathbf{W}_{uv} \mathbf{C}\mathbf{f}\|^2 \right]. \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Calculemos ahora  $-2\mathcal{L}_g(\underline{\alpha}, \beta) = -2 \log p(\underline{\alpha}, \beta | \mathbf{g})$ :

$$\begin{aligned}
-2 \log p(\underline{\alpha}, \beta | \mathbf{g}) & = -MN \log \beta - \log \det \left[ \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right] \\
& + \log \det \left[ \beta \mathbf{H}^t \mathbf{H} + \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right] \\
& + \beta \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 + \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \|\mathbf{W}_{uv} \mathbf{C}\mathbf{f}\|^2 \tag{4.24}
\end{aligned}$$

y derivemos con respecto a  $\alpha_{uv}$ ,  $u, v \in \{l, h\}$ , y  $\beta$  para hallar las condiciones que se cumplen en los máximos. Diferenciando con respecto a  $\beta$  e igualando a cero obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [-2 \log p(\underline{\alpha}, \beta)]}{\partial \beta} &= \text{tr} \left[ \left( \beta \mathbf{H}^t \mathbf{H} + \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{H}^t \mathbf{H} \right] \\ &- \frac{MN}{\beta} + \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

de donde podemos despejar  $\beta$ :

$$\beta^{-1} = \frac{\text{tr} \left[ \left( \beta \mathbf{H}^t \mathbf{H} + \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{H}^t \mathbf{H} \right] + \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}\|^2}{MN} \quad (4.26)$$

Diferenciando ahora con respecto a  $\alpha_{ij}$ ,  $i, j \in \{l, h\}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial [-2 \log p(\underline{\alpha}, \beta)]}{\partial \alpha_{ij}} &= -\text{tr} \left[ \left( \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{ij}^t \mathbf{W}_{ij} \mathbf{C} \right] \\ &+ \text{tr} \left[ \left( \beta \mathbf{H}^t \mathbf{H} + \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{ij}^t \mathbf{W}_{ij} \mathbf{C} \right] \\ &+ \|\mathbf{W}_{ij} \mathbf{C}\mathbf{f}\|^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Obsérvese que no podemos despejar  $\alpha_{ij}$  directamente de la expresión anterior. Sin embargo, sabemos que:

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[ \left( \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{ij}^t \mathbf{W}_{ij} \mathbf{C} \right] &= \\ \frac{1}{\alpha_{ij}} \text{tr} \left[ \left( \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right)^{-1} \alpha_{ij} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{ij}^t \mathbf{W}_{ij} \mathbf{C} \right], \end{aligned} \quad (4.28)$$

con lo que tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial [-2 \log p(\underline{\alpha}, \beta)]}{\partial \alpha_{ij}} &= -\frac{1}{\alpha_{ij}} \operatorname{tr} \left[ \left( \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right)^{-1} \alpha_{ij} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{ij}^t \mathbf{W}_{ij} \mathbf{C} \right] \\
&+ \operatorname{tr} \left[ \left( \beta \mathbf{H}^t \mathbf{H} + \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{ij}^t \mathbf{W}_{ij} \mathbf{C} \right] \\
&+ \|\mathbf{W}_{ij} \mathbf{C} \mathbf{f}\|^2 = 0, \tag{4.29}
\end{aligned}$$

de donde podemos despejar  $\alpha_{ij}$ , obteniendo:

$$\alpha_{ij}^{-1} = \frac{\|\mathbf{W}_{ij} \mathbf{C} \mathbf{f}\|^2 + \operatorname{tr} \left[ \left( \beta \mathbf{H}^t \mathbf{H} + \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{ij}^t \mathbf{W}_{ij} \mathbf{C} \right]}{\operatorname{tr} \left[ \left( \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right)^{-1} \alpha_{ij} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{ij}^t \mathbf{W}_{ij} \mathbf{C} \right]} \tag{4.30}$$

Es interesante observar que, si empleamos el mismo hiperparámetro para algunas de las subbandas, las ecuaciones (4.26) y (4.26) son también fáciles de calcular.

#### 4.5.2. Paso de estimación de la imagen original

Estudiemos ahora el paso de restauración de la imagen. Una vez estimados los hiperparámetros,  $\alpha_{uv}$ ,  $u, v \in \{l, h\}$ , y  $\beta$ , la estimación de la imagen original,  $\mathbf{f}_{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}$ , se selecciona como la imagen que satisface

$$\mathbf{f}_{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} = \arg \min_{\mathbf{f}} \left[ \sum_{uv \in \{lh\}} \hat{\alpha}_{uv} \|\mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \mathbf{f}\|^2 + \hat{\beta} \|\mathbf{g} - \mathbf{H} \mathbf{f}\|^2 \right], \tag{4.31}$$

esto es, para estimar la imagen original resolveremos:

$$\left( \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} + \beta \mathbf{H}^t \mathbf{H} \right) \mathbf{f} = \beta \mathbf{H}^t \mathbf{g}, \tag{4.32}$$

haciendo uso de los valores estimados para los hiperparámetros en el paso anterior.

Obsérvese que estamos estimando los hiperparámetros mediante máxima verosimilitud y que la estimación de  $\mathbf{f}$  se realiza mediante el *máximo a posteriori* (MAP). Además, aunque los pasos anteriores sean independientes, el esquema iterativo que vamos a proponer a continuación obtiene ambas estimaciones de forma simultánea.

## 4.6. Algoritmo de restauración multicanal con estimación simultánea de los hiperparámetros basado en la descomposición de modelos autorregresivos

Formularemos ahora el algoritmo resultante del análisis basado en la evidencia que hemos desarrollado a lo largo del capítulo, que estará formado por dos pasos, uno de estimación de los hiperparámetros basado en las ecuaciones (4.26) y (4.26), donde los términos de la derecha de cada ecuación se obtendrían a partir de los valores de la iteración anterior, y otro de estimación de la imagen original basado en la ecuación (4.32) en el que se haría uso de los parámetros que acabamos de estimar. Estableceremos como criterio de convergencia que  $\|\mathbf{f}^{k+1} - \mathbf{f}^k\| / \|\mathbf{f}^k\| < \rho$ , con  $\rho$  una constante positiva cercana a 0.

### Algoritmo 4.1 Restauración multicanal basada en la descomposición de modelos autorregresivos

1. Escoger una solución inicial,  $\mathbf{f}^0$ ,  $\underline{\alpha}^0$  y  $\beta^0$
2. Repetir
  - a) Estimación de hiperparámetros: Calcular  $\alpha_{uv}^{k+1}$ ,  $uv \in \{l, h\}$  y  $\beta^{k+1}$  a partir de  $\alpha_{uv}^k$ ,  $uv \in \{l, h\}$ ,  $\beta^k$  y  $\mathbf{f}^k$ :

$$(\beta^{k+1})^{-1} = \frac{\text{tr} \left[ \left( \beta^k \mathbf{H}^t \mathbf{H} + \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv}^k \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{H}^t \mathbf{H} \right] + \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}^k\|^2}{MN}$$

$$(\alpha_{ij}^{k+1})^{-1} = \frac{\|\mathbf{W}_{ij}\mathbf{C}\mathbf{f}^k\|^2 + \text{tr} \left[ \left( \beta^k \mathbf{H}^t \mathbf{H} + \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv}^k \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{ij}^t \mathbf{W}_{ij} \mathbf{C} \right]}{\text{tr} \left[ \left( \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv}^k \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} \right)^{-1} \alpha_{ij}^k \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{ij}^t \mathbf{W}_{ij} \mathbf{C} \right]}$$

b) *Estimación de la imagen: Calcular  $\mathbf{f}^{k+1}$  a partir de  $\alpha_{uv}^{k+1}$ ,  $uv \in \{l, h\}$  y  $\beta^{k+1}$ :*

$$\mathbf{f}^{k+1} = \left( \sum_{u,v \in \{l,h\}} \alpha_{uv}^{k+1} \mathbf{C}^t \mathbf{W}_{uv}^t \mathbf{W}_{uv} \mathbf{C} + \beta^{k+1} \mathbf{H}^t \mathbf{H} \right)^{-1} \beta^{k+1} \mathbf{H}^t \mathbf{g},$$

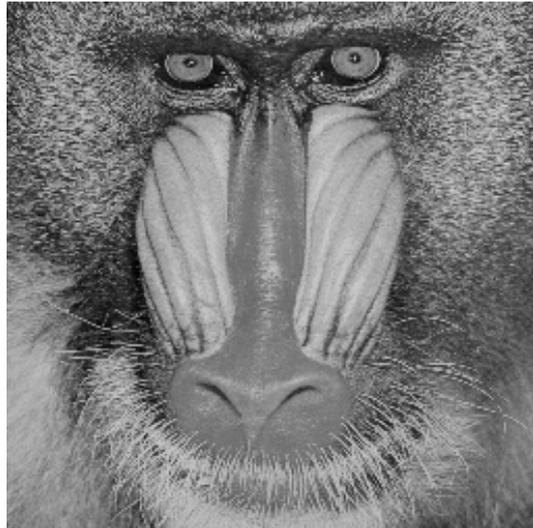
hasta que  $\|\mathbf{f}^{k+1} - \mathbf{f}^k\| / \|\mathbf{f}^k\| < \rho$ .

Es importante observar que, al igual que en el caso del algoritmo propuesto en el capítulo anterior, podemos formular este algoritmo a través de la descomposición multicanal de las matrices involucradas (véase el apéndice B), de manera que podremos convertirlas en matrices circulantes por bloques (CB) o matrices por bloques circulantes (BC), lo que nos permitirá diagonalizar por bloques estas matrices mediante el uso de la DFT, pudiendo realizar implementaciones rápidas de las operaciones en el dominio frecuencial.

## 4.7. Resultados experimentales

Para mostrar el comportamiento del algoritmo propuesto, hemos usado las mismas imágenes empleadas en el capítulo anterior, *baboon*, *harbour* y *lena*, que poseen diferentes características en cuanto a actividad espacial.

Hemos ejecutado el algoritmo propuesto sobre cada una de las imágenes, degradadas según el modelo de formación de la sección 2.2, con emborronamiento por movimiento horizontal de 9 píxeles y emborronamiento por desenfoque con radio  $R = 4,5$  (véase la sección 2.2.1) y ruido gaussiano aditivo con diferentes varianzas para obtener SNRs de 10dB, 20dB, 30dB y 40dB (véase la ecuación (2.30)). No hemos observado problemas de convergencia en ninguna de las ejecuciones del algoritmo realizadas, alcanzando el criterio de convergencia prácticamente en la totalidad de los casos antes de las 10 iteraciones.



*mandril*



*puerto*



*lena*

Figura 4.3: Imágenes empleadas como banco de pruebas.

Como ya hemos comentado en la sección 2.2.3, vamos a emplear la métrica de la mejora en la relación señal-ruido (ISNR), definida en 2.30, para poder medir de forma objetiva la calidad de los resultados obtenidos, recordando siempre que esta medida no refleja las características del sistema visual humano. De hecho, observaremos en los experimentos algunas “contradicciones” entre los valores de ISNR obtenidos y la observación de las restauraciones generadas.

En las tablas 4.1, 4.2 y 4.3 se muestran las estimaciones de los parámetros obtenidas mediante el algoritmo propuesto para las tres imágenes consideradas. Para poder comparar los resultados obtenidos en la estimación de los parámetros incluimos en las tablas 4.4, 4.5 y 4.6 los resultados obtenidos mediante el algoritmo bayesiano jerárquico monocanal con estimación de los parámetros por máxima verosimilitud propuesto en [93] empleando como modelo a priori  $p(\mathbf{f}|\alpha) \propto \exp[-\frac{\alpha}{2}\|\mathbf{C}\mathbf{f}\|^2]$ . Se puede comprobar que en la mayoría de los casos el método propuesto en [93] infraestima la varianza del ruido, mientras que el método que proponemos hace estimaciones más cercanas a los valores reales de  $\beta^{-1}$  (salvo algunos casos en los que la varianza del ruido es baja, en los que sobreestima ligeramente la varianza del ruido al alcanzar la convergencia).

En las figuras 4.4 a 4.9 se muestran algunos de los resultados obtenidos. La figura 4.4 muestra la imagen observada, degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano para obtener una SNR de 20dB, la restauración obtenida con el algoritmo propuesto en [93] y la obtenida mediante el algoritmo que proponemos. La solución obtenida mediante el algoritmo multicanal elimina mejor el ruido, aunque se ha perdido parte de la información correspondiente a las fronteras de la imagen y ésta se observa algo menos resuelta. Observamos que este fenómeno también se producía en el algoritmo propuesto en el capítulo anterior y que, al igual que antes, se debe a los bajos valores que el método estima para las bandas  $LH$ ,  $HL$  y  $HH$ , lo que viene causado porque al minimizar la ecuación (4.31), los altos valores de  $\alpha_{uv}$ ,  $u, v \in \{l, h\}$  hacen que el método tienda a minimizar especialmente los términos correspondientes a las bandas de frecuencias altas. En la figura 4.5 pueden observarse resultados similares para la misma imagen de prueba con emborronamiento por desenfoque uniforme con  $R = 4,5$ . No obstante es interesante destacar que en este caso el algoritmo multicanal obtiene

menores valores de ISNR que el algoritmo monocanal, lo que demuestra la importancia de un criterio subjetivo a la hora de valorar los resultados.

En las figuras 4.6 y 4.7 se muestran los resultados obtenidos para la imagen *puerto* para los dos emborronamientos considerados. Podemos ver que, de nuevo, los resultados obtenidos por el algoritmo multicanal son mejores en términos de eliminación de ruido aunque de nuevo se observa que las imágenes pierden información de fronteras en el proceso de estimación. Las características particulares de la imagen hacen que resulte especialmente observable este hecho, así como que también hacen que se produzca un fenómeno de *ringing*, debido a la alta correlación existente entre las bandas de la transformada wavelet y al hecho de que en las bandas de frecuencias altas algunas de las fronteras han sido eliminadas.

En las figuras 4.8 y 4.9 podemos ver las restauraciones obtenidas para la imagen *lena*. Las características particulares de esta imagen (baja actividad o bajo nivel de pequeños detalles) hacen que en este caso los resultados sean, desde un punto de vista subjetivo, particularmente evidente la mejora aportada por el algoritmo multicanal, lo que se puede comprobar a través de las cifras correspondientes a ISNR que podemos observar en la tabla 4.9. De nuevo, el fenómeno del *ringing* resulta más evidente en las restauraciones obtenidas con nuestro método debido a que éste elimina mejor el ruido, estando también presente en las restauraciones obtenidas con el algoritmo monocanal.

Podemos ver que el principal problema que plantea el algoritmo propuesto es la infraestimación de las varianzas de las bandas altas, lo que hace que parte de la información de fronteras de la imagen se pierda en el proceso de restauración al intentar eliminar el ruido, dominante en estas bandas. Por ello, y gracias a la flexibilidad del modelo de imagen propuesto, hemos realizado un experimento adicional en el que hemos modificado el algoritmo de manera que usemos un único parámetro para las tres bandas de altas frecuencias (y naturalmente otro para la banda *LL*).

En la tabla 4.10 se muestran las ISNRs obtenidas para la imagen *mandril* para los dos emborronamientos y los diferentes niveles de ruido considerados en los experimentos anteriores. Podemos ver que en todos los casos se obtienen valores iguales o superiores a los que se muestran en la tabla 4.7. La figura 4.10 muestra los resultados obtenidos.

Podemos ver que el uso de un único parámetro para las tres bandas altas proporciona restauraciones libres de ruido pero con más información de fronteras y más resueltas, que resultan también mejores desde un punto de vista subjetivo.

Emborronamiento	SNR (varianza)	$\beta^{-1}$	$\alpha_{LL}^{-1}$	$\alpha_{LH}^{-1}$	$\alpha_{HL}^{-1}$	$\alpha_{HH}^{-1}$
Movimiento $L = 9$	30dB (1,0)	3,79	197,89	1,25	637,90	2,83
	20dB (10,8)	13,92	184,96	3,96	603,11	9,06
	10dB (121,0)	124,14	189,83	33,43	547,76	78,29
Desenfocaje $R = 4,5$	30dB (1,0)	1,70	157,36	0,41	0,51	0,79
	20dB (9,0)	9,70	159,14	2,57	2,68	5,83
	10dB (100,0)	99,81	209,79	27,05	27,18	62,94

Tabla 4.1: Estimación de parámetros del algoritmo propuesto para la imagen *mandril*.

Emborronamiento	SNR (varianza)	$\beta^{-1}$	$\alpha_{LL}^{-1}$	$\alpha_{LH}^{-1}$	$\alpha_{HL}^{-1}$	$\alpha_{HH}^{-1}$
Movimiento $L = 9$	30dB (1,44)	2,39	194,57	0,84	646,73	1,37
	20dB (16,0)	16,30	211,18	4,76	809,47	10,47
	10dB (144,0)	140,85	245,79	38,88	1041,41	90,56
Desenfocaje $R = 4,5$	30dB (1,21)	1,76	162,17	0,40	0,58	0,74
	20dB (12,25)	12,78	173,84	3,39	3,58	7,67
	10dB (121,0)	120,77	216,15	32,65	32,98	75,94

Tabla 4.2: Estimación de parámetros del algoritmo propuesto para la imagen *puerto*.

Emborronamiento	SNR (varianza)	$\beta^{-1}$	$\alpha_{LL}^{-1}$	$\alpha_{LH}^{-1}$	$\alpha_{HL}^{-1}$	$\alpha_{HH}^{-1}$
Movimiento $L = 9$	30dB (1,44)	2,57	113,69	0,83	30,13	1,37
	20dB (16,0)	20,97	110,96	5,81	25,36	12,85
	10dB (144,0)	193,85	125,66	53,31	41,94	123,39
Desenfocaje $R = 4,5$	30dB (1,21)	2,07	127,79	0,59	0,55	1,19
	20dB (12,25)	20,15	154,24	5,54	5,46	12,68
	10dB (121,0)	194,48	200,41	52,95	52,68	122,93

Tabla 4.3: Estimación de parámetros del algoritmo propuesto para la imagen *lena*.

Emborronamiento	SNR (varianza)	$\beta^{-1}$	$\alpha^{-1}$
Movimiento $L = 9$	30dB (1,0)	0,74	1038,19
	20dB (10,8)	8,01	1420,83
	10dB (121,0)	104,34	2284,32
Desenfoque $R = 4,5$	30dB (1,0)	0,76	1414,67
	20dB (9,0)	7,62	2363,06
	10dB (100,0)	92,90	4491,07

Tabla 4.4: Estimación de parámetros del algoritmo monocanal para la imagen *mandril*.

Emborronamiento	SNR (varianza)	$\beta^{-1}$	$\alpha^{-1}$
Movimiento $L = 9$	30dB (1,44)	0,84	905,31
	20dB (16,0)	11,05	1478,52
	10dB (144,0)	122,29	2475,96
Desenfoque $R = 4,5$	30dB (1,21)	0,87	1365,97
	20dB (12,25)	10,44	2489,72
	10dB (121,0)	113,06	4560,07

Tabla 4.5: Estimación de parámetros del algoritmo monocanal para la imagen *puerto*.

Emborronamiento	SNR (varianza)	$\beta^{-1}$	$\alpha^{-1}$
Movimiento $L = 9$	30dB (1,44)	1,16	603,05
	20dB (16,0)	15,09	1041,59
	10dB (144,0)	173,75	1768,49
Desenfoque $R = 4,5$	30dB (1,21)	1,46	1166,29
	20dB (12,25)	17,74	2323,77
	10dB (121,0)	185,81	4174,95

Tabla 4.6: Estimación de parámetros del algoritmo monocanal para la imagen *lena*.

Emborronamiento	SNR (varianza)	Propuesto	Monocanal
Movimiento $L = 9$	30dB (1,44)	3,23	6,11
	20dB (16,0)	2,19	1,61
	10dB (144,0)	1,37	-0,19
Desenfocaje $R = 4,5$	30dB (1,21)	1,68	2,24
	20dB (12,25)	1,09	-0,35
	10dB (121,0)	-0,84	-1,6

Tabla 4.7: ISNRs obtenidos para la imagen *mandril* con el algoritmo propuesto y el algoritmo monocanal.

Emborronamiento	SNR (varianza)	Propuesto	Monocanal
Movimiento $L = 9$	30dB (1,44)	3,88	3,50
	20dB (16,0)	2,09	-0,60
	10dB (144,0)	1,51	-1,22
Desenfocaje $R = 4,5$	30dB (1,21)	2,57	2,04
	20dB (12,25)	1,68	-0,51
	10dB (121,0)	1,35	-1,51

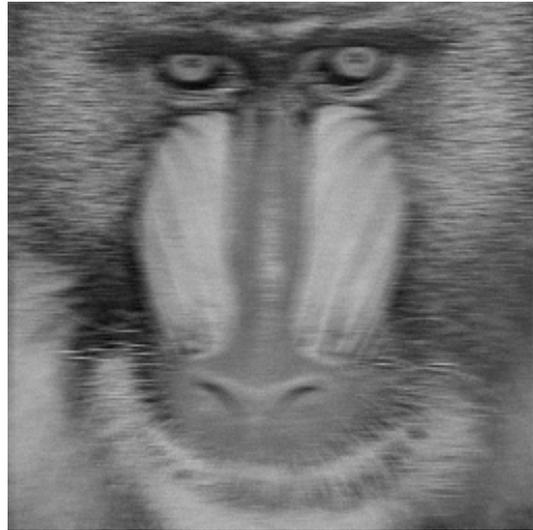
Tabla 4.8: ISNRs obtenidos para la imagen *puerto* con el algoritmo propuesto y el algoritmo monocanal.

Emborronamiento	SNR (varianza)	Propuesto	Monocanal
Movimiento $L = 9$	30dB (1,44)	5,73	4,14
	20dB (16,0)	3,93	0,86
	10dB (144,0)	3,48	0,83
Desenfocaje $R = 4,5$	30dB (1,21)	4,59	0,70
	20dB (12,25)	2,77	-1,40
	10dB (121,0)	2,83	-1,21

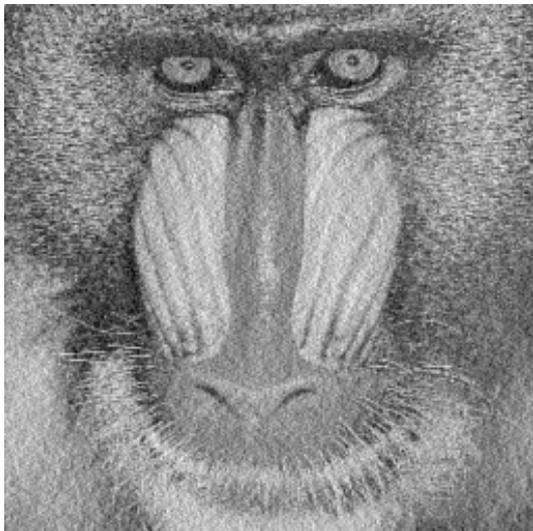
Tabla 4.9: ISNRs obtenidos para la imagen *lena* con el algoritmo propuesto y el algoritmo monocanal.

Emborronamiento	SNR (varianza)	Algoritmo propuesto (2 parámetros)
Movimiento $L = 9$	30dB (1,44)	6,35
	20dB (16,0)	2,65
	10dB (144,0)	1,34
Desenfoque $R = 4,5$	30dB (1,21)	1,70
	20dB (12,25)	1,11
	10dB (121,0)	0,83

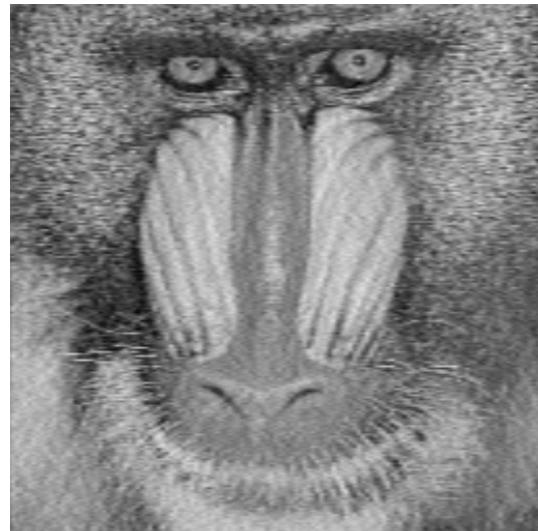
Tabla 4.10: ISNRs obtenidos para la imagen *mandril* con el algoritmo propuesto usando sólo dos parámetros, uno para la banda  $LL$  y otro para las bandas  $LH$ ,  $HL$  y  $HH$ .



(a)

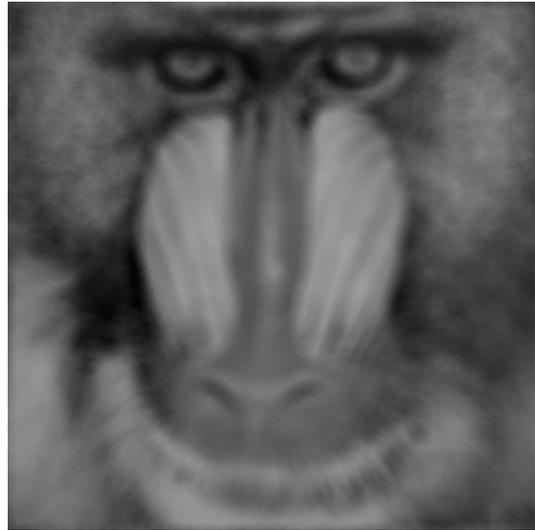


(b)

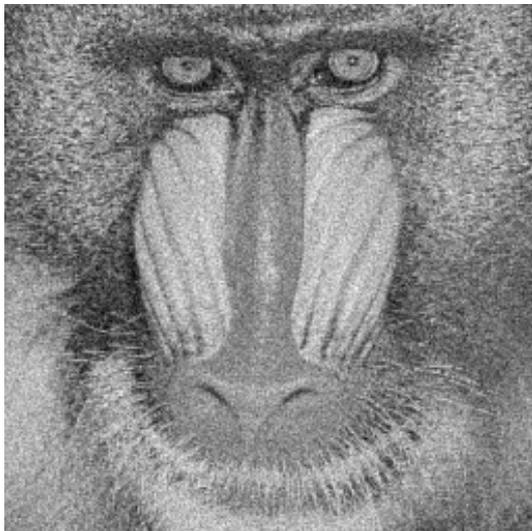


(c)

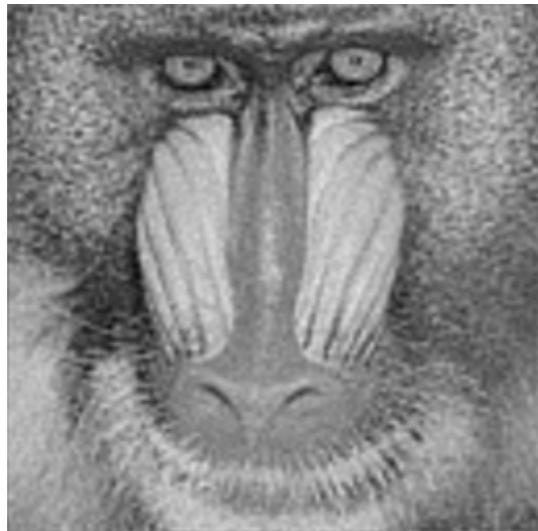
Figura 4.4: (a) Imagen *mandril* degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano ( $SNR = 20dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto



(a)



(b)



(c)

Figura 4.5: (a) Imagen *mandril* degradada por emborronamiento por desenfoque uniforme y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto



(a)



(b)



(c)

Figura 4.6: (a) Imagen *puerto* degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto



(a)



(b)



(c)

Figura 4.7: (a) Imagen *puerto* degradada por emborronamiento por desenfoque uniforme y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto



(a)

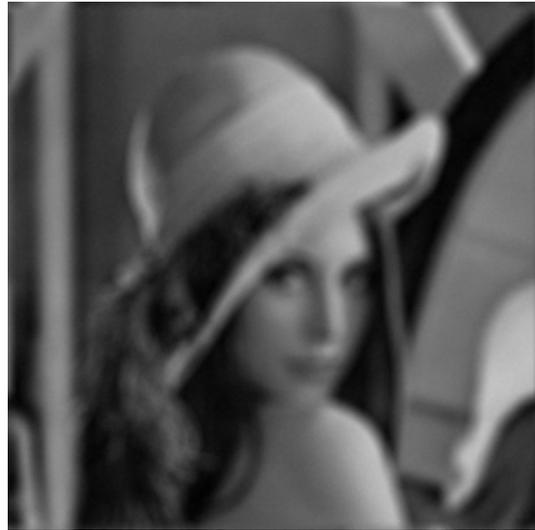


(b)



(c)

Figura 4.8: (a) Imagen *lena* degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano ( $SNR = 20dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto



(a)



(b)

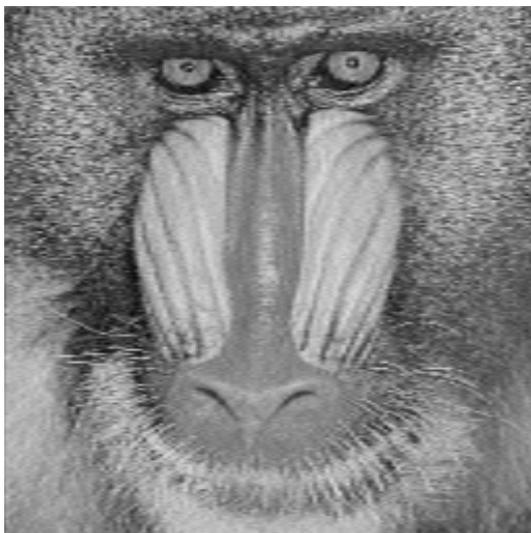


(c)

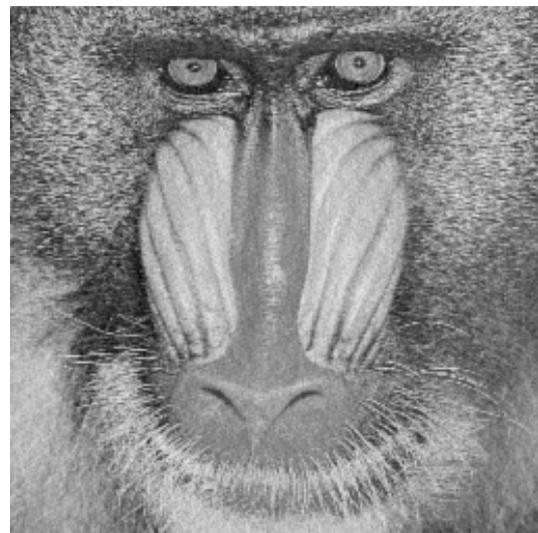
Figura 4.9: (a) Imagen *lena* degradada por emborronamiento por desenfoque uniforme y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración monocanal (c) Restauración con el algoritmo propuesto



(a)



(b)



(c)

Figura 4.10: (a) Imagen *mandril* degradada por emborronamiento por movimiento lineal y ruido gaussiano ( $SNR = 30dB$ ), (b) Restauración con el algoritmo propuesto (4 parámetros) (c) Restauración con el algoritmo propuesto (2 parámetros)

# Capítulo 5

## Reconstrucción de imágenes de alta resolución con multisensores

The most exciting phrase to hear in science,  
the one that heralds new discoveries,  
is not “Eureka!” but “That’s funny. . .”

Isaac Asimov (1920–1992)

### 5.1. Introducción

En los dos capítulos anteriores hemos utilizado las descomposiciones matriciales descritas en los apéndices A y B para realizar una descomposición subbanda de las imágenes y formular modelos de imágenes en base a cada una de estas subbandas. Dicha descomposición nos ha permitido abordar tanto la restauración de la imagen original como la estimación de los parámetros asociados al problema de una forma eficiente.

En este capítulo veremos cómo de nuevo la descomposición de señales descrita en los apéndices nos permite abordar eficientemente la reconstrucción de una imagen de alta resolución a partir de varias observaciones de baja resolución.

Durante las dos últimas décadas se ha investigado sobre el problema de la reconstrucción de imágenes de alta resolución a partir de de fotogramas de la misma escena submuestreados, desplazados y degradados con errores de desplazamiento a nivel subpíxel. Desde el trabajo pionero de Tsai y Huang ([146]), los investigadores, principalmente

ingenieros, se han centrado en la formulación del problema de alta resolución como un problema de reconstrucción (véase [19] para una completa revisión) o como un problema de reconocimiento (véanse [5], [6], [47] y también [30]). La comunidad astronómica también ha trabajado en el problema de alta resolución y ha proporcionado el método *Drizzle* para reconstruir imágenes de alta resolución (véase [48]). Sin embargo, como se detalla en [19], no se ha dedicado mucho esfuerzo al cálculo eficiente de la reconstrucción o a la estimación de los parámetros asociados.

Bose y Boo ([20]) hacen uso de una descomposición en matrices por bloques circulantes para calcular la reconstrucción MAP. Chan *et al.* ([31], [32], [33]) y Nguyen ([114], [115], [117]) emplean preconditionamiento y wavelets, además de la descomposición en matrices por bloques circulantes. El cálculo eficiente de la reconstrucción MAP también ha sido abordado por Ng *et al.* ([112], [113]) y Elad y Hel-Or ([46]).

Sólo los trabajos de Bose *et al.* ([21]), Nguyen ([116], [114], [117], [118]) y en parte [33] y [142], [144] y [143] tratan el problema de la estimación de parámetros. Además, en estos trabajos se supone el mismo parámetro para todas las imágenes de baja resolución, aunque en el caso de [21] el método propuesto se puede extender para hacer uso de diferentes parámetros para las imágenes de baja resolución (véase [13]).

Sea  $\mathbf{f}$  la imagen de alta resolución de tamaño  $(M_1 \times M_2) \times 1$  y sea  $\mathbf{g}_{l_1, l_2}$  la imagen de baja resolución  $(N_1 \times N_2) \times 1$  observada por el  $(l_1, l_2)$ -ésimo sensor,  $(l_1, l_2) \in \{0, \dots, L-1\}^2$ , descrita en la sección 2.3.1. Nuestro objetivo será reconstruir, mediante la aplicación del paradigma bayesiano,  $\mathbf{f}$  a partir del conjunto de observaciones de baja resolución  $\{\mathbf{g}_{l_1, l_2} \mid (l_1, l_2) \in \{0, \dots, L-1\}^2\}$ .

Como ya se ha descrito en la sección 2.4, el primer paso en el paradigma bayesiano es la definición de una distribución a priori, una distribución de probabilidad sobre las imágenes de alta resolución,  $\mathbf{f}$ ,  $p(\mathbf{f}|\alpha)$ . Es aquí donde incorporamos información sobre la estructura esperada de  $\mathbf{f}$ . Nuestro modelo será brevemente descrito en la sección 5.2. También es necesario especificar  $p(\mathbf{g}_{l_1, l_2}|\mathbf{f}, \beta_{l_1, l_2})$  la distribución de probabilidad de la imagen observada de baja resolución  $\mathbf{g}_{l_1, l_2}$  si  $\mathbf{f}$  fuera la “verdadera” imagen de alta resolución. El modelo de observación se describe en la sección 5.3. Estos modelos de imagen y de alta a baja resolución dependen de parámetros desconocidos,  $\alpha$  y

$\beta_{l_1, l_2}$ ,  $(l_1, l_2) \in \{0, \dots, L-1\}^2$  que debemos estimar. La estimación de la imagen de alta resolución, así como de los parámetros del modelo se encuentran en la sección 5.4. La sección experimental 5.5 concluye este capítulo.

## 5.2. Modelo de imagen

La información que vamos a incorporar sobre la estructura esperada en la imagen de alta resolución hará referencia a la suavidad de la imagen, por lo que vamos a hacer uso del modelo simultáneo autorregresivo (SAR) descrito en la sección 4.2, que ha sido caracterizado en la ecuación (4.8). Es interesante observar que, desde el punto de vista de la regularización, el modelo SAR impone restricciones sobre la segunda derivada.

Así pues, nuestro modelo de imagen será

$$p(\mathbf{f}|\alpha) = \frac{1}{Z_{prior}(\alpha)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \alpha \mathbf{f}^t (I - \phi \mathbf{N})^t (I - \phi N) \mathbf{f} \right\}, \quad (5.1)$$

donde  $Z_{prior}(\alpha) = (\prod_{i,j} \lambda_{ij}^2)^{-1/2} (2\pi/\alpha)^{p/2}$ , con  $p = M \times N$  y

$$\lambda_{ij} = 1 - 2\phi \left[ \cos \left( 2\pi \frac{i}{M} \right) + \cos \left( 2\pi \frac{j}{N} \right) \right], \quad i = 0, \dots, M-1, j = 0, \dots, N-1.$$

## 5.3. Modelo de degradación

Teniendo en cuenta el modelo de formación descrito en la sección 2.3.1, en particular a partir de la ecuación (2.25), tenemos

$$p(\mathbf{g}_{l_1, l_2} | \mathbf{f}, \beta_{l_1, l_2}) \propto \frac{1}{Z(\beta_{l_1, l_2})} \exp \left[ -\frac{\beta_{l_1, l_2}}{2} \|\mathbf{g}_{l_1, l_2} - \mathbf{W}_{l_1, l_2} \mathbf{f}\|^2 \right], \quad (5.2)$$

donde  $Z(\beta_{l_1, l_2}) = (2\pi/\beta_{l_1, l_2})^{(N_1 \times N_2)/2}$ .

Recordemos que notamos por  $\mathbf{g}$  la suma de las imágenes de baja resolución supermuestreadas, es decir,  $\mathbf{g} = \sum_{u=0}^{L-1} \sum_{v=0}^{L-1} \mathbf{D}_{u,v}^t \mathbf{g}_{u,v}$ . Entonces tendremos

$$p(\mathbf{g} | \mathbf{f}, \underline{\beta}) \propto \frac{1}{Z_{noise}(\underline{\beta})} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{l_1=0}^{L-1} \sum_{l_2=0}^{L-1} \beta_{l_1, l_2} \|\mathbf{g}_{l_1, l_2} - \mathbf{W}_{l_1, l_2} \mathbf{f}\|^2 \right], \quad (5.3)$$

donde  $\underline{\beta} = (\beta_{l_1, l_2} \mid (l_1, l_2) \in \{0, \dots, L-1\}^2)$  es un vector de parámetros y  $Z_{noise}(\underline{\beta}) = \prod_{l_1=0}^{L-1} \prod_{l_2=0}^{L-1} Z(\beta_{l_1, l_2})$ .

## 5.4. Reconstrucción de imágenes de alta resolución basada en la evidencia

Los pasos que seguiremos para estimar los parámetros,  $\alpha$  y  $\underline{\beta}$ , y la imagen original son los siguientes:

### 5.4.1. Paso de estimación de los parámetros

En primer lugar,  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\underline{\beta}} = (\hat{\beta}_{l_1, l_2} | (l_1, l_2) \in \{0, \dots, L-1\}^2)$  se seleccionan como

$$\hat{\alpha}, \hat{\underline{\beta}} = \arg \max_{\alpha, \underline{\beta}} \mathcal{L}_{\mathbf{g}}(\alpha, \underline{\beta}) = \arg \max_{\alpha, \underline{\beta}} \log p(\mathbf{g} | \alpha, \underline{\beta}), \quad (5.4)$$

donde

$$p(\mathbf{g} | \alpha, \underline{\beta}) = \int_{\mathbf{f}} p(\mathbf{f} | \alpha) p(\mathbf{g} | \mathbf{f}, \underline{\beta}) d\mathbf{f}. \quad (5.5)$$

### 5.4.2. Paso de estimación de la imagen original

Una vez que se han estimado los parámetros, la estimación de la imagen original  $\mathbf{f}_{(\hat{\alpha}, \hat{\underline{\beta}})}$ , se elige como la imagen que satisface

$$\mathbf{f}_{(\hat{\alpha}, \hat{\underline{\beta}})} = \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ \hat{\alpha} \|\mathbf{C}\mathbf{f}\|^2 + \sum_{l_1=0}^{L-1} \sum_{l_2=0}^{L-1} \hat{\beta}_{l_1, l_2} \|\mathbf{g}_{l_1, l_2} - \mathbf{W}_{l_1, l_2} \mathbf{f}\|^2 \right\}, \quad (5.6)$$

lo que produce

$$\mathbf{f}_{(\hat{\alpha}, \hat{\underline{\beta}})} = \mathbf{Q}(\hat{\alpha}, \hat{\underline{\beta}})^{-1} \sum_{l_1=0}^{L-1} \sum_{l_2=0}^{L-1} \hat{\beta}_{l_1, l_2} \mathbf{W}_{l_1, l_2}^t \mathbf{g}_{l_1, l_2}, \quad (5.7)$$

donde

$$\mathbf{Q}(\hat{\alpha}, \hat{\underline{\beta}}) = \hat{\alpha} \mathbf{C}^t \mathbf{C} + \sum_{l_1=0}^{L-1} \sum_{l_2=0}^{L-1} \hat{\beta}_{l_1, l_2} \mathbf{W}_{l_1, l_2}^t \mathbf{W}_{l_1, l_2}. \quad (5.8)$$

Obsérvese que estamos usando máxima verosimilitud para estimar los parámetros y el MAP para estimar  $\mathbf{f}$ . Además, aunque los pasos anteriores son independientes, el esquema propuesto realiza ambas estimaciones simultáneamente.

El proceso de estimación que estamos empleando podría realizarse dentro del llamado enfoque bayesiano jerárquico (véase la sección 2.4) mediante la inclusión de distribuciones a priori sobre el parámetros  $\hat{\alpha}$  y el vector de parámetros desconocidos  $\hat{\underline{\beta}}$ . Sin

embargo, la posibilidad de incorporar conocimiento adicional sobre ellos a través de distribuciones gamma u otras no se discutirá en esta memoria (véase [53], [97]).

Examinemos el proceso de estimación en detalle. Fijando  $\alpha$  y  $\underline{\beta}$  y expandiendo la función

$$M(\mathbf{f}, \mathbf{g}|\alpha, \underline{\beta}) = \alpha \|\mathbf{C}\mathbf{f}\|^2 + \sum_{l1=0}^{L-1} \sum_{l2=0}^{L-1} \beta_{l1,l2} \|\mathbf{g}_{l1,l2} - \mathbf{W}_{l1,l2}\mathbf{f}\|^2, \quad (5.9)$$

alrededor de  $\mathbf{f}_{(\alpha,\underline{\beta})}$ , tenemos

$$M(\mathbf{f}, \mathbf{g}|\alpha, \underline{\beta}) = M(\mathbf{f}_{(\alpha,\underline{\beta})}, \mathbf{g}|\alpha, \underline{\beta}) + \frac{1}{2} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_{(\alpha,\underline{\beta})})^t \mathbf{Q}(\alpha, \underline{\beta}) (\mathbf{f} - \mathbf{f}_{(\alpha,\underline{\beta})}). \quad (5.10)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{g}|\alpha, \underline{\beta}) &= \frac{\exp\left\{-M(\mathbf{f}_{(\alpha,\underline{\beta})}, \mathbf{g}|\alpha, \underline{\beta})/2\right\}}{Z_{prior}(\alpha)Z_{noise}(\underline{\beta})} \int_{\mathbf{f}} \exp\left\{-\frac{1}{2} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_{(\alpha,\underline{\beta})})^t \mathbf{Q}(\alpha, \underline{\beta}) (\mathbf{f} - \mathbf{f}_{(\alpha,\underline{\beta})})\right\} d\mathbf{f} \\ &= \frac{\exp\left\{-M(\mathbf{f}_{(\alpha,\underline{\beta})}, \mathbf{g}|\alpha, \underline{\beta})/2\right\} |\mathbf{Q}(\alpha, \underline{\beta})|^{-1/2}}{Z_{prior}(\alpha)Z_{noise}(\underline{\beta})}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} 2\mathcal{L}_{\mathbf{g}}(\alpha, \underline{\beta}) &= -\alpha \left\| \mathbf{C}\mathbf{f}_{(\alpha,\underline{\beta})} \right\|^2 - \sum_{l1=0}^{L-1} \sum_{l2=0}^{L-1} \beta_{l1,l2} \left\| \mathbf{g}_{l1,l2} - \mathbf{W}_{l1,l2}\mathbf{f}_{(\alpha,\underline{\beta})} \right\|^2 \\ &\quad - \log |\mathbf{Q}(\alpha, \underline{\beta})| - 2 \log Z_{prior}(\alpha) - 2 \log Z_{noise}(\underline{\beta}) + \text{const.} \end{aligned}$$

Diferenciando ahora  $-2\mathcal{L}_{\mathbf{g}}(\alpha, \underline{\beta})$  con respecto a  $\alpha$  y  $\underline{\beta}$  para encontrar las condiciones que se satisfacen en los máximos, tendremos

$$\left\| \mathbf{C}\mathbf{f}_{(\alpha,\underline{\beta})} \right\|^2 + \text{tr} [\mathbf{Q}(\alpha, \underline{\beta})^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{C}] = \frac{M_1 \times M_2}{\alpha}, \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{g}_{l1,l2} - \mathbf{W}_{l1,l2}\mathbf{f}_{(\alpha,\underline{\beta})} \right\|^2 + \text{tr} [\mathbf{Q}(\alpha, \underline{\beta})^{-1} \mathbf{W}_{l1,l2}^t \mathbf{W}_{l1,l2}] &= \frac{N_1 \times N_2}{\beta_{l1,l2}}, \quad (5.13) \\ l1, l2 = 0, \dots, L-1. \end{aligned}$$

Se propone el siguiente algoritmo para la estimación simultánea de los parámetros y la imagen de alta resolución.

**Algoritmo 5.1** Algoritmo de reconstrucción de imágenes de alta resolución basado en la evidencia

1. Elegir  $\alpha^0$  y  $\underline{\beta}^0$ .
2. Calcular  $\mathbf{f}_{(\alpha^0, \underline{\beta}^0)}$  usando (5.7) con  $\hat{\alpha} = \alpha^0$  y  $\hat{\underline{\beta}} = \underline{\beta}^0$ , es decir,

$$\mathbf{f}_{(\hat{\alpha}^0, \hat{\underline{\beta}}^0)} = \mathbf{Q} \left( \hat{\alpha}^0, \hat{\underline{\beta}}^0 \right)^{-1} \sum_{l1=0}^{L-1} \sum_{l2=0}^{L-1} \hat{\beta}_{l1, l2}^0 \mathbf{W}_{l1, l2}^t \mathbf{g}_{l1, l2},$$

3. Para  $k = 1, 2, \dots$ 
  - a) Calcular  $\alpha^k$  y  $\underline{\beta}^k$  sustituyendo  $\alpha^{k-1}$  y  $\underline{\beta}^{k-1}$  en la parte izquierda de las ecuaciones (5.12) y (5.13):

$$\begin{aligned} (\alpha^k)^{-1} &= \frac{\left\| \mathbf{C} \mathbf{f}_{(\alpha^{k-1}, \underline{\beta}^{k-1})} \right\|^2 + \text{tr} \left[ \mathbf{Q}(\alpha^{k-1}, \underline{\beta}^{k-1})^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{C} \right]}{M_1 \times M_2} \\ (\beta_{l1, l2}^k)^{-1} &= \frac{\left\| \mathbf{g}_{l1, l2} - \mathbf{W}_{l1, l2} \mathbf{f}_{(\alpha^{k-1}, \underline{\beta}^{k-1})} \right\|^2 + \text{tr} \left[ \mathbf{Q}(\alpha^{k-1}, \underline{\beta}^{k-1})^{-1} \mathbf{W}_{l1, l2}^t \mathbf{W}_{l1, l2} \right]}{N_1 \times N_2} \end{aligned}$$

- b) Calcular  $\mathbf{f}_{(\alpha^k, \underline{\beta}^k)}$  mediante (5.7) con  $\hat{\alpha} = \alpha^k$  y  $\hat{\underline{\beta}} = \underline{\beta}^k$ :

$$\mathbf{f}_{(\hat{\alpha}^k, \hat{\underline{\beta}}^k)} = \mathbf{Q} \left( \hat{\alpha}^k, \hat{\underline{\beta}}^k \right)^{-1} \sum_{l1=0}^{L-1} \sum_{l2=0}^{L-1} \hat{\beta}_{l1, l2}^k \mathbf{W}_{l1, l2}^t \mathbf{g}_{l1, l2},$$

hasta que  $\left\| \mathbf{f}_{(\alpha^k, \underline{\beta}^k)} - \mathbf{f}_{(\alpha^{k-1}, \underline{\beta}^{k-1})} \right\| \leq \rho$ .

Vamos a realizar ahora algunos comentarios sobre estas ecuaciones:

- Si se emplea el mismo parámetro para algunas de las observaciones de baja resolución, las ecuaciones (5.12) y (5.13) resultan más fáciles de resolver. En particular, si todas las varianzas del ruido se suponen iguales, es decir, si  $\beta_{l1, l2} = \beta, \forall l1, l2$ , la ecuación (5.13) se convierte en

$$\sum_{l1=0}^{L-1} \sum_{l2=0}^{L-1} \left( \left\| \mathbf{g}_{l1, l2} - \mathbf{W}_{l1, l2} \mathbf{f}_{(\alpha, \underline{\beta})} \right\|^2 + \text{tr} \left[ \mathbf{Q}(\alpha, \underline{\beta})^{-1} \mathbf{W}_{l1, l2}^t \mathbf{W}_{l1, l2} \right] \right) = \frac{M_1 \times M_2}{\beta}. \quad (5.14)$$

Obsérvese que  $\beta$  hace referencia aquí a un valor y no debería confundirse con  $\underline{\beta}$ , que denota un vector de parámetros.

- Puesto que

$$\alpha \operatorname{tr} [\mathbf{Q}(\alpha, \underline{\beta})^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{C}] + \sum_{l_1=0}^{L-1} \sum_{l_2=0}^{L-1} \beta_{l_1, l_2} \operatorname{tr} [\mathbf{Q}(\alpha, \underline{\beta})^{-1} \mathbf{W}_{l_1, l_2}^t \mathbf{W}_{l_1, l_2}] = \operatorname{tr} [\mathbf{I}_{M_1 \times M_2}], \quad (5.15)$$

haciendo uso de las ecuaciones (5.12) y (5.13) tenemos que

$$\alpha \left\| \mathbf{C} \mathbf{f}_{(\alpha, \underline{\beta})} \right\|^2 + \alpha \operatorname{tr} [\mathbf{Q}(\alpha, \underline{\beta})^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{C}] = M_1 \times M_2$$

y

$$\sum_{l_1=0}^{L-1} \sum_{l_2=0}^{L-1} \beta_{l_1, l_2} \left\| \mathbf{g}_{l_1, l_2} - \mathbf{W}_{l_1, l_2} \mathbf{f}_{(\alpha, \underline{\beta})} \right\|^2 + \sum_{l_1=0}^{L-1} \sum_{l_2=0}^{L-1} \beta_{l_1, l_2} \operatorname{tr} [\mathbf{Q}(\alpha, \underline{\beta})^{-1} \mathbf{W}_{l_1, l_2}^t \mathbf{W}_{l_1, l_2}] = M_1 \times M_2$$

Así vemos que la estimación por máxima verosimilitud (mle), verifica,

$$\alpha \left\| \mathbf{C} \mathbf{f}_{(\alpha, \underline{\beta})} \right\|^2 + \sum_{l_1=0}^{L-1} \sum_{l_2=0}^{L-1} \beta_{l_1, l_2} \left\| \mathbf{g}_{l_1, l_2} - \mathbf{W}_{l_1, l_2} \mathbf{f}_{(\alpha, \underline{\beta})} \right\|^2 = M_1 \times M_2, \quad (5.16)$$

lo que significa que una parte de las observaciones se emplea para calcular la adaptación al modelo a priori ( $\alpha \left\| \mathbf{C} \mathbf{f}_{(\alpha, \underline{\beta})} \right\|^2$ ), y otra parte se usa para el ajuste con el proceso de alta a baja resolución ( $\beta_{l_1, l_2} \left\| \mathbf{g}_{l_1, l_2} - \mathbf{W}_{l_1, l_2} \mathbf{f}_{(\alpha, \underline{\beta})} \right\|^2$ ,  $l_1, l_2 = 0, \dots, L-1$ ).

- El algoritmo 5.1 es, de hecho, un algoritmo EM ([44]) con datos completos  $\mathcal{X}^t = (\mathbf{f}^t, \mathbf{g}^t)$  y datos incompletos  $\mathcal{Y} = \mathbf{g} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}]^t \mathcal{X}$ . Los pasos 3a y 3b incrementan iterativamente  $\mathcal{L}_{\mathbf{g}}(\alpha, \underline{\beta})$  (véase [109] para más detalles).
- Podemos observar que para encontrar la estimación MAP necesitamos invertir  $\mathbf{Q}(\alpha, \underline{\beta})$  y para estimar los parámetros tenemos que calcular para  $l_1, l_2 = 0, \dots, L-1$  los valores de  $\operatorname{tr}[\mathbf{Q}(\alpha, \underline{\beta})^{-1} \mathbf{C}^t \mathbf{C}]$  y  $\operatorname{tr}[\mathbf{Q}(\alpha, \underline{\beta})^{-1} \mathbf{W}_{l_1, l_2}^t \mathbf{W}_{l_1, l_2}]$ . En [109] se muestra cómo estos cálculos pueden realizarse de forma eficiente en el dominio de las frecuencias empleando propiedades de las matrices circulantes por bloques (véase apéndice B).

## 5.5. Resultados experimentales

Se ha realizado una serie de simulaciones con el algoritmo propuesto sobre un conjunto de imágenes. Presentamos aquí resultados con dos imágenes, evaluando el rendimiento del método propuesto bajo diferentes condiciones de ruido y comparándolo con otros enfoques existentes para estimar los parámetros.

Para todos los experimentos realizados, se ha hecho uso del criterio  $\| \mathbf{f}_{(\alpha^k, \underline{\beta}^k)} - \mathbf{f}_{(\alpha^{k-1}, \underline{\beta}^{k-1})} \|^2 / \| \mathbf{f}_{(\alpha^{k-1}, \underline{\beta}^{k-1})} \|^2 < 10^{-6}$  para terminar el algoritmo iterativo. Dado  $\mathbf{f}^0 = \mathbf{g}$ , calculamos

$$(\alpha^0)^{-1} = \frac{\| \mathbf{Cf}^0 \|^2}{M_1 \times M_2}$$

y

$$(\beta_{l_1, l_2}^0)^{-1} = \frac{\| \mathbf{g}_{l_1, l_2} - \mathbf{W}_{l_1, l_2} \mathbf{f}^0 \|^2}{N_1 \times N_2}$$

en todos nuestros experimentos, donde  $\mathbf{g}$  se ha definido en la ecuación (2.28). El rendimiento de los algoritmos de restauración se ha evaluado midiendo la mejora de la relación señal-ruido (ISNR), definida en la ecuación (2.30).

Hemos comparado el algoritmo propuesto con los métodos de Validación Cruzada Generalizada (GCV: *Generalized Cross-Validation*) ([117]) y de la L-curva ([21]). Ambos métodos estiman la imagen de alta resolución mediante

$$\hat{\mathbf{f}}_\lambda = \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ \lambda \| \mathbf{Cf} \|^2 + \sum_{l_1=0}^{L-1} \sum_{l_2=0}^{L-1} \| \mathbf{g}_{l_1, l_2} - \mathbf{W}_{l_1, l_2} \mathbf{f} \|^2 \right\}, \quad (5.17)$$

donde  $\lambda$  se escoge usando los métodos de GCV ([117]) o de la L-curva ([21]). Los valores respectivos de  $\lambda$  se notarán  $\lambda_{GCV}$  y  $\lambda_{L-curva}$ . Véase [51] para una descripción de la Validación Cruzada Generalizada y de otros métodos para escoger el parámetro de regularización en problemas de restauración de imágenes.

Obsérvese que los métodos de la L-curva y GCV estiman un único parámetro. Éste corresponde al problema de baja a alta resolución en el que se supone la misma varianza del ruido para todas las imágenes de baja resolución (véase la ecuación (2.25)). Obsérvese también que seleccionar la imagen de alta resolución de acuerdo a la ecuación (5.17) es lo mismo que encontrar la solución de la ecuación (5.6) con  $\alpha = \lambda$  y  $\beta_{l_1, l_2} = \beta \quad \forall l_1, l_2$ .

Se ha dedicado un primer experimento a comprobar el rendimiento del método propuesto bajo diferentes condiciones de ruido en las imágenes de baja resolución. La imagen  $256 \times 256$ ,  $\mathbf{f}$ , mostrada en la figura 5.1 ha sido emborronada empleando la función de emborronamiento definida en la ecuación (2.22) con  $L = 4$ , lo que produjo la imagen  $\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{f}$ . Entonces  $\mathbf{u}$  fue submuestreada con  $L_1 = L_2 = 4$ , obteniendo las dieciséis imágenes de baja resolución  $64 \times 64$

$$u_{l_1, l_2}(x, y) = u(L_1x + l_1, L_2y + l_2) \quad x, y = 0, \dots, \frac{256}{4} - 1, \quad l_1, l_2 = 0, \dots, 3. \quad (5.18)$$

Se ha añadido ruido gaussiano con la misma varianza, esto es,  $\beta_{l_1, l_2} = \beta, \forall l_1, l_2$  a cada una de las imágenes de baja resolución para obtener tres conjuntos de dieciséis imágenes de baja resolución degradadas. La varianza del ruido para cada conjunto se fijó a 161,29, 14,44 y 1,44, respectivamente, obteniendo así una SNR de aproximadamente 10dB, 20dB y 30dB en las imágenes de baja resolución de cada conjunto.

La figura 5.2 muestra las reconstrucciones para el caso de 30dB SNR. La figura 5.2a muestra la imagen  $\mathbf{g}_{0,0}$  supermuestreada por duplicación de píxeles (véase la ecuación (2.25)). Cada una de las imágenes de baja resolución de cada conjunto fue interpolada bilinealmente para obtener una imagen  $256 \times 256$ . La mejor en términos de ISNR se muestra en la figura 5.2b. La imagen inicial,  $\mathbf{f}^0$ , se muestra en la figura 5.2c. La figura 5.2d representa la imagen de alta resolución estimada mediante el algoritmo propuesto cuando se consideran dieciséis parámetros del ruido. La imagen de alta resolución obtenida mediante el método propuesto con el mismo parámetro de ruido para las dieciséis observaciones de baja resolución, véase la ecuación (5.14), es casi idéntica y no se incluye aquí. Las figuras 5.2e y 5.2f muestran las imágenes obtenidas estimando la imagen de alta resolución haciendo uso de los valores de los parámetros seleccionados por los métodos de GCV y de la L-curva, respectivamente. A partir de estas figuras queda claro que el algoritmo propuesto proporciona las reconstrucciones de mayor calidad visual.

Para validar el algoritmo de estimación de parámetros propuesto en una serie de simulaciones, se han generado diez realizaciones para cada nivel de ruido. La tabla 5.1 muestra los valores medios de ISNR para los diferentes métodos considerados. A partir

de esta tabla podemos ver que el método propuesto mejora la SNR incluso con ruido severo, aunque se logran mayores mejoras conforme el ruido disminuye. La ISNR obtenida por el algoritmo propuesto es mayor que las obtenidas por los métodos de GCV y de la L-curva, produciendo resultados menos ruidosos. En la tabla 5.1 hemos incluido la ISNR obtenida por el método propuesto cuando se usa uno y dieciséis parámetros. Los resultados son casi idénticos en ambos casos, validando así el proceso de estimación. La tabla 5.1 también muestra la desviación estándar de las diez ISNRs obtenidas por el algoritmo propuesto con uno y dieciséis parámetros y el número de iteraciones requeridas.

Los parámetros estimados del modelo de imagen y sus desviaciones estándar, entre paréntesis, para los tres conjuntos de imágenes con un parámetro de ruido fueron  $\alpha^{-1} = 217$  (1.0),  $\alpha^{-1} = 192,3$  (1.4) y  $\alpha^{-1} = 198,5$  (2.1), respectivamente. Los correspondientes parámetros de ruido medios para las imágenes de baja resolución se muestran en la tabla 5.2, junto con sus desviaciones estándar. Al estudiar estas tablas podemos concluir que el algoritmo propuesto proporciona buenas estimaciones de las varianzas del ruido de las imágenes de baja resolución. Los resultados de la estimación de dieciséis parámetros de ruido, uno para cada imagen de baja resolución, también fueron muy cercanos a sus valores reales. Para comparar el método propuesto con los enfoques de GCV y de la L-curva, hemos incluido en la tabla 5.2 el valor equivalente de  $\lambda$  obtenido por nuestro método cuando se estimaba sólo un parámetro de ruido. Podemos ver que tanto la GCV como la L-curva obtienen menores parámetros de regularización y por lo tanto reconstrucciones más ruidosas.

La figura 5.3 muestra la evolución de la ISNR para los tres conjuntos de imágenes de baja resolución. Obsérvese que la mayoría de la mejora se obtuvo en las primeras iteraciones. Cada iteración consumió 15.5 segundos en un ordenador Pentium IV 1700.

Se realizó también un segundo experimento para comprobar el algoritmo propuesto cuando se emplean diferentes varianzas del ruido en las observaciones de baja resolución. La imagen original de la figura 5.1 fue emborronada y submuestreada como en el experimento anterior y se le añadió ruido gaussiano a cada imagen de baja resolución para obtener un conjunto de dieciséis imágenes de baja resolución con diferentes

características de ruido, con SNRs de 10dB, 20dB o 30dB seleccionadas aleatoriamente (véase la tabla 5.3). Al igual que en el experimento anterior, se generaron diez realizaciones del ruido. La figura 5.4a muestra la imagen  $\mathbf{g}_{0,0}$  supermuestreada por duplicación de píxeles. La interpolación bilineal se muestra en la figura 5.4b. Las figuras 5.4c y 5.4d muestran los resultados obtenidos por el algoritmo propuesto estimando uno y dieciséis parámetros del ruido, respectivamente, y las figuras 5.4e y 5.4f muestran los resultados con los procedimientos de GCV y de la L-curva. Queda claro a partir de las imágenes que el método propuesto supera a los otros métodos considerados, tanto en el caso de uno como de dieciséis parámetros del ruido. El mejor resultado desde el punto de vista visual se obtiene cuando se estima un parámetro de ruido para cada imagen de baja resolución.

En la tabla 5.4 se muestra la ISNR obtenida por el algoritmo propuesto estimando uno y dieciséis parámetros, y también mediante los métodos de GCV y la L-curva. Podemos ver que incluso cuando el algoritmo propuesto estima sólo un parámetro de ruido se obtienen mejores resultados que con los otros métodos. La ISNR obtenida por el algoritmo propuesto con dieciséis parámetros es claramente el mejor resultado logrado. Podemos ver también en esta tabla el número de iteraciones requeridas por el algoritmo propuesto para satisfacer el criterio de convergencia. La tabla 5.4 muestra también los valores estimados de  $\lambda$  por el método propuesto cuando se estima un único parámetro del ruido y por GCV y la L-curva. Se puede ver que tanto GCV como la L-curva obtienen ISNRs significativamente menores que el método propuesto.

El valor medio del parámetro del modelo de imagen estimado por el algoritmo propuesto es  $\alpha^{-1} = 182,8$ , con desviación estándar 3,1, cuando se estimaba un único parámetro, y  $\alpha^{-1} = 203,9$ , con desviación estándar 1,0, cuando se han estimado dieciséis parámetros. La tabla 5.5 muestra los valores medios de los parámetros de varianza del ruido y sus correspondientes desviaciones estándar entre paréntesis. Podemos ver que se obtienen buenas estimaciones aunque es cierto que los valores de varianza pequeños son ligeramente sobreestimados cuando su imagen de baja resolución está cerca, en términos de desplazamientos, a otras imágenes de baja resolución con mayores varianzas del ruidos. Se obtuvo un valor de  $\beta^{-1} = 46,86$ , con desviación estándar

0,61, cuando se estimó un parámetro de ruido. Este valor es cercano a la media de las varianzas del ruido de las imágenes de baja resolución.

En un tercer experimento también comprobamos el método propuesto sobre imágenes de baja resolución con diferentes varianzas. Primero se obtuvo el conjunto de imágenes de baja resolución emborronando y submuestreando la imagen original  $256 \times 256$  de la figura 5.5a siguiendo el mismo procedimiento de los experimentos anteriores. Después a cada imagen de baja resolución se le añadió ruido gaussiano para obtener imágenes degradadas con SNRs de 20dB, 30dB, o 40dB. Las varianzas del ruido empleadas se muestran en la tabla 5.6. La figura 5.5b muestra la imagen  $\mathbf{g}_{00}$  supermuestreada por duplicación de píxeles.

Hemos ejecutado el algoritmo propuesto partiendo de la imagen inicial (Fig. 5.5c) obteniendo al alcanzar la convergencia la imagen estimada de alta resolución mostrada en la figura 5.5d. La ISNR fue de 11,63dB y el parámetro del modelo de imagen estimado,  $\alpha^{-1} = 683,9$ . Los valores estimados de las varianzas del ruido se muestran en la tabla 5.7.

Comparando los parámetros reales y estimados del modelo de degradación (véanse las tablas 5.6 y 5.7) podemos observar que el modelo propuesto obtiene buenas estimaciones para todos los parámetros, aunque, de nuevo, los valores de varianza pequeños son sobreestimados cuando sus imágenes de baja resolución están cercanas, en términos de desplazamientos, a otras imágenes de baja resolución con mayores varianzas.

La figura 5.6a muestra  $\| \mathbf{f}_{(\alpha^k, \underline{\beta}^k)} - \mathbf{f}_{(\alpha^{k-1}, \underline{\beta}^{k-1})} \|^2 / \| \mathbf{f}_{(\alpha^{k-1}, \underline{\beta}^{k-1})} \|^2$  frente al número de iteraciones. Obsérvese que el eje vertical está en escala logarítmica. Podemos ver que el método converge rápidamente, necesitando sólo unas pocas iteraciones para obtener una buena estimación de la imagen.

La figura 5.6b muestra la ISNR frente al número de iteraciones. Podemos ver que la ISNR crece de forma monótona y que la mayoría de la mejora se obtiene en las primeras cuatro iteraciones.

Tabla 5.1: Resumen de resultados para los tres conjuntos de baja resolución. Cada columna muestra estadísticas para las diez simulaciones.

	161.29 $\approx$ 10dB	14.44 $\approx$ 20dB	1.44 $\approx$ 30dB
Interpolación bilineal ISNR media	0.54 dB	0.24 dB	0.21 dB
Algoritmo propuesto, 1 parámetro de ruido, ISNR media	6.17 dB	7.96 dB	10.70 dB
Algoritmo propuesto, 16 parámetros de ruido, ISNR media	6.17 dB	7.95 dB	10.70 dB
GCV, ISNR media	3.67 dB	6.29 dB	8.01 dB
L-curva, ISNR media	2.24 dB	6.09 dB	8.01 dB
Algoritmo propuesto, 1 parámetro de ruido, desviación estándar	0.03	0.02	0.03
Algoritmo propuesto, 16 parámetros de ruido, desviación estándar	0.03	0.02	0.03
Algoritmo propuesto, 1 parámetro de ruido, n° de iteraciones	4	13	12
Algoritmo propuesto, 16 parámetros de ruido, n° de iteraciones	4	13	13

Tabla 5.2: Estadísticas de las varianzas del ruido estimadas y del parámetro de regularización para las diez simulaciones de los tres conjuntos de imágenes de baja resolución con un parámetro del ruido.

Varianza del ruido, $\beta$	161.29 $\approx$ 10dB	14.44 $\approx$ 20dB	1.44 $\approx$ 30dB
Algoritmo propuesto, $\hat{\beta}^{-1}$ medio	160.87	14.55	1.42
Algoritmo propuesto $\lambda = \alpha/\beta$	0.74	0.07	0.007
$\lambda_{GCV}$	0.14	0.03	0.010
$\lambda_{L-curva}$	0.06	0.02	0.010
Algoritmo propuesto, desviación estándar de las estimaciones	1.1	0.12	0.02

Tabla 5.3: SNR y varianzas del ruido para las imágenes de baja resolución del segundo experimento.

$SNR/\beta_{l_1, l_2}^{-1}$	0	1	2	3
0	10dB / 161.29	20dB / 14.44	30dB / 1.44	10dB / 161.29
1	20dB / 14.44	30dB / 1.44	10dB / 161.29	30dB / 1.44
2	30dB / 1.44	20dB / 14.44	30dB / 1.44	20dB / 14.44
3	20dB / 14.44	30dB / 1.44	10dB / 161.29	20dB / 14.44

Tabla 5.4: ISNR para el segundo experimento.

Método	ISNR
Interpolación bilineal	0.80 dB
Algoritmo propuesto, 1 parámetro de ruido. 12 iteraciones, $\lambda = 0,26$	6.86 dB
Algoritmo propuesto, 16 parámetros de ruido 14 iteraciones	9.09 dB
GCV ( $\lambda_{GCV} = 0,016$ )	5.95 dB
L-curva ( $\lambda_{L-curva} = 0,06$ )	2.91 dB

Tabla 5.5: Medias de los parámetros de ruido estimados para el segundo experimento; véase la tabla 5.3. Entre paréntesis, sus desviaciones estándar para las diez realizaciones.

$\hat{\beta}_{1,12}^{-1}$	0	1	2	3
0	162.04 (3.66)	14.23 (0.41)	1.33 (0.09)	159.40 (1.61)
1	14.18 (0.31)	2.89 (0.12)	159.90 (3.95)	1.44 (0.04)
2	1.67 (0.06)	13.60 (0.33)	1.72 (0.08)	13.72 (0.53)
3	13.96 (0.33)	1.53 (0.04)	160.44 (3.24)	13.86 (0.23)

Tabla 5.6: SNR y varianzas del ruido para las imágenes de baja resolución de la figura 5.5b.

$SNR/\beta_{1,12}^{-1}$	0	1	2	3
0	20dB / 38.94	30dB / 4.00	40dB / 0.39	20dB / 40.63
1	30dB / 3.90	20dB / 38.72	40dB / 0.39	30dB / 3.86
2	40dB / 0.39	20dB / 41.03	30dB / 3.88	40dB / 0.40
3	20dB / 39.73	40dB / 0.39	30dB / 3.93	20dB / 39.20



Figura 5.1: Imagen original  $256 \times 256$  de alta resolución.

Tabla 5.7: Varianzas del ruido estimadas para la imagen de alta resolución de la figura 5.5d.

$\hat{\beta}_{l_1, l_2}^{-1}$	0	1	2	3
0	37.70	3.37	0.80	38.75
1	3.59	36.13	1.12	2.73
2	0.95	37.54	3.27	1.76
3	37.36	1.27	3.02	37.28

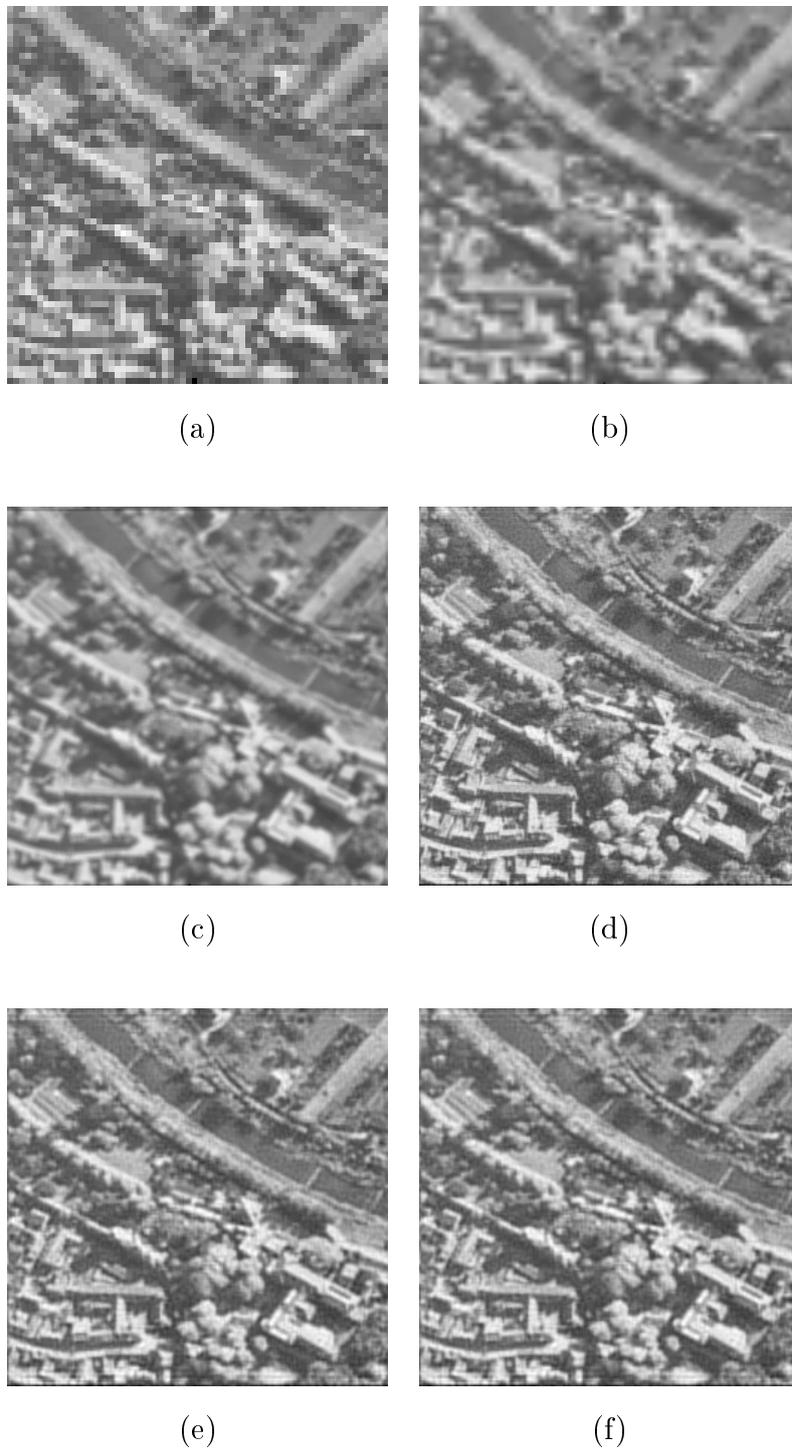


Figura 5.2: Primer experimento, 30dB: (a) Supermuestreo por duplicación de píxeles de  $g_{0,0}$ , (b) Mejor imagen interpolada bilinealmente, (c) Imagen de alta resolución inicial, (d) Imagen de alta resolución estimada con el método propuesto, (e) Imagen de alta resolución estimada con GCV y (f) Imagen de alta resolución estimada con la L-curva.



Figura 5.3: Evolución de la ISNR frente al número de iteraciones para los tres conjuntos de imágenes de baja resolución.

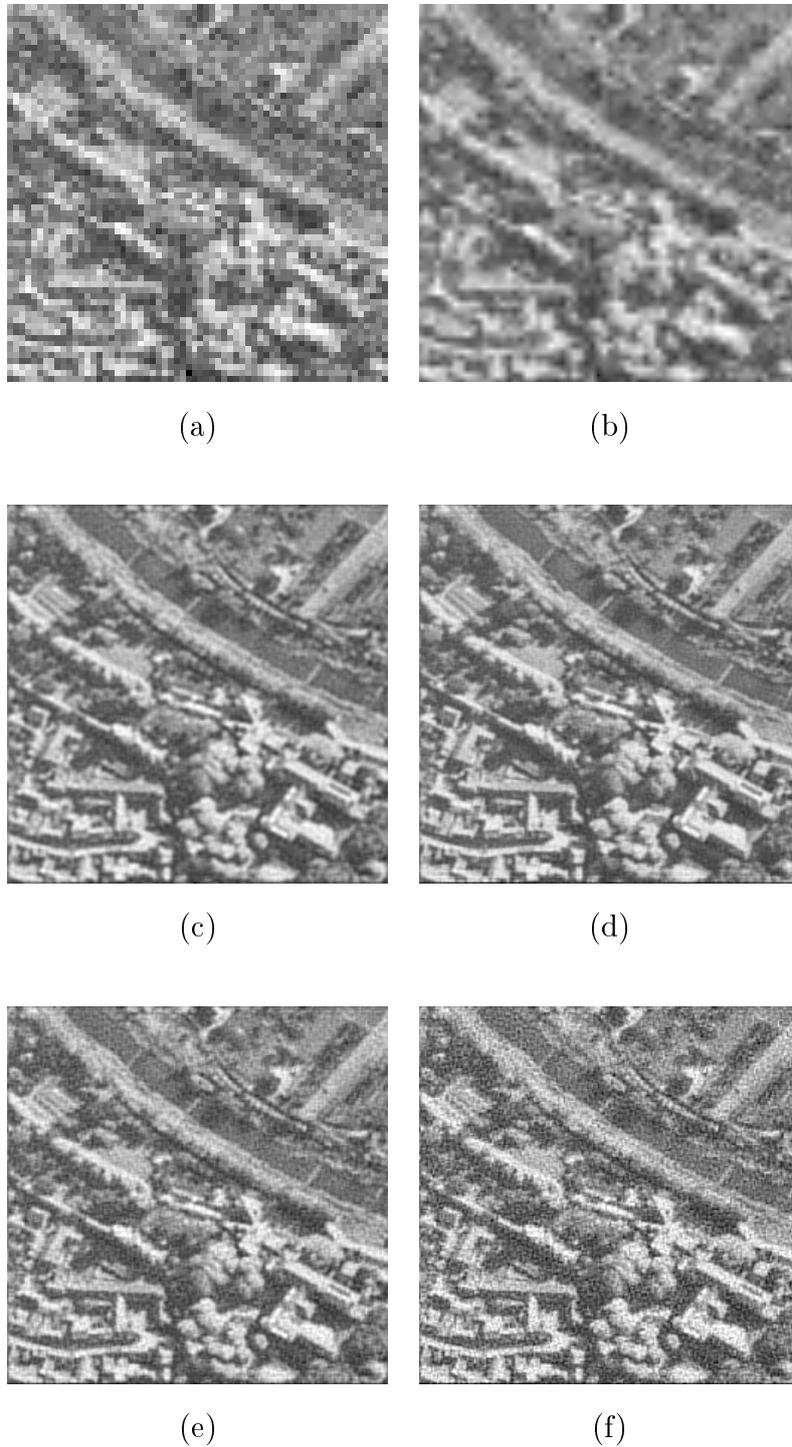


Figura 5.4: (a) Supermuestreo por duplicación de píxeles de  $g_{0,0}$ , (b) Mejor imagen interpolada bilinealmente, (c) Imagen estimada de alta resolución (1 parámetro), (d) Imagen estimada de alta resolución (16 parámetros), (e) Imagen estimada de alta resolución mediante GCV y (f) mediante la L-curva.

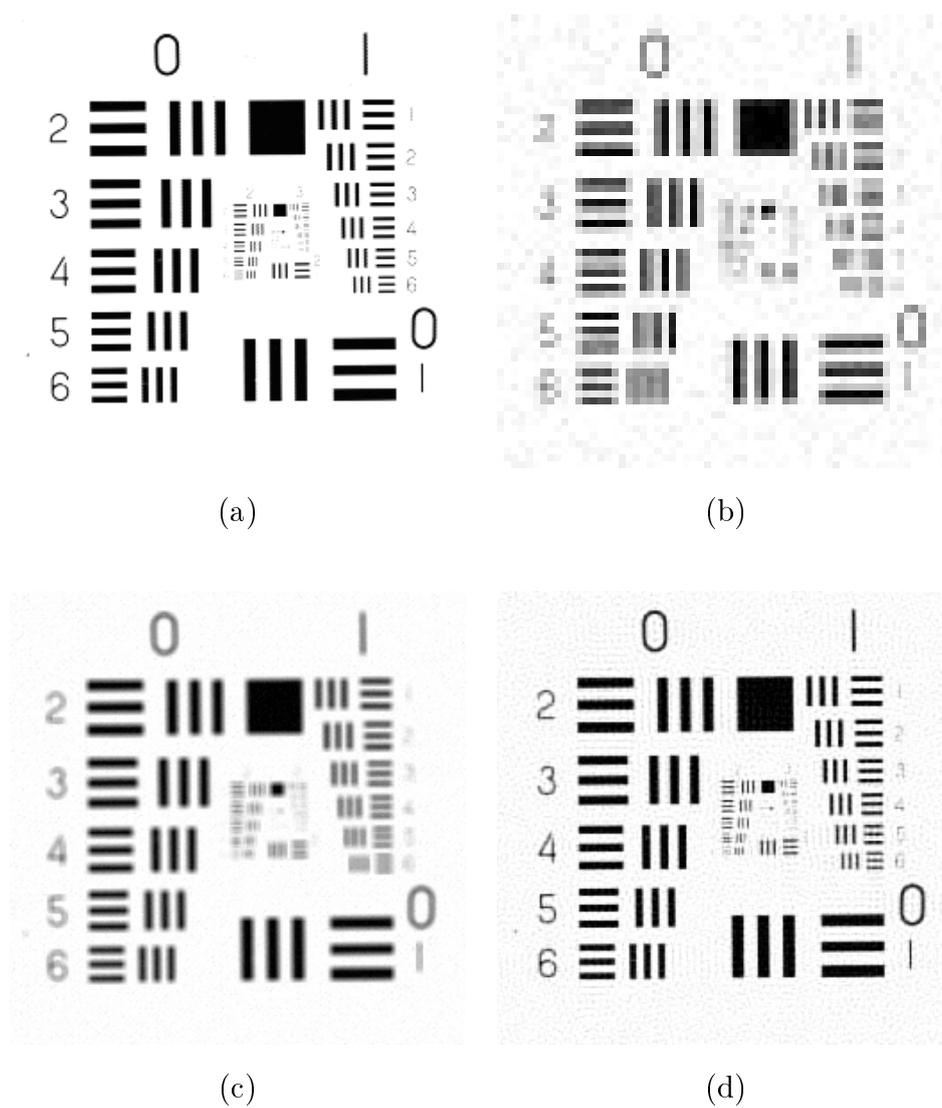
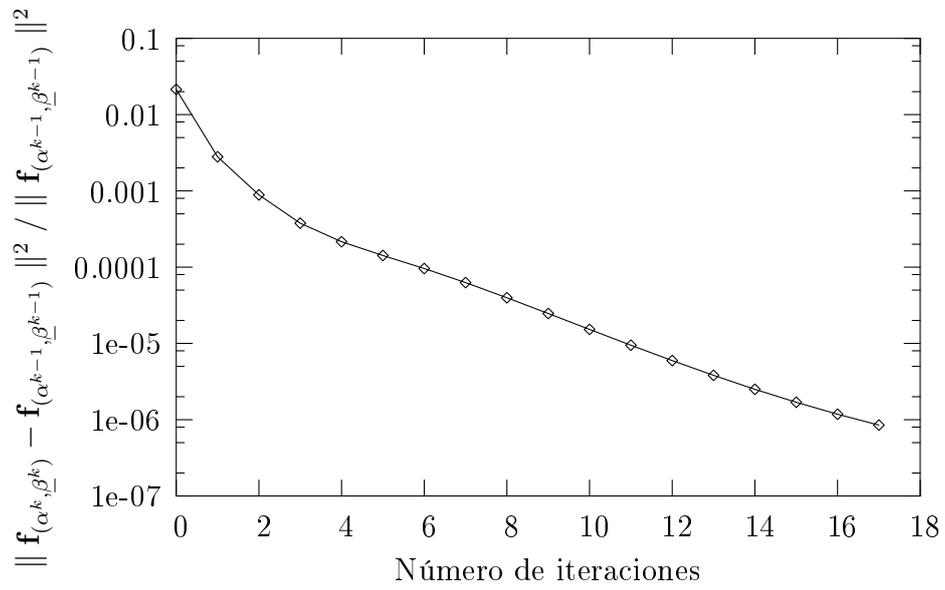
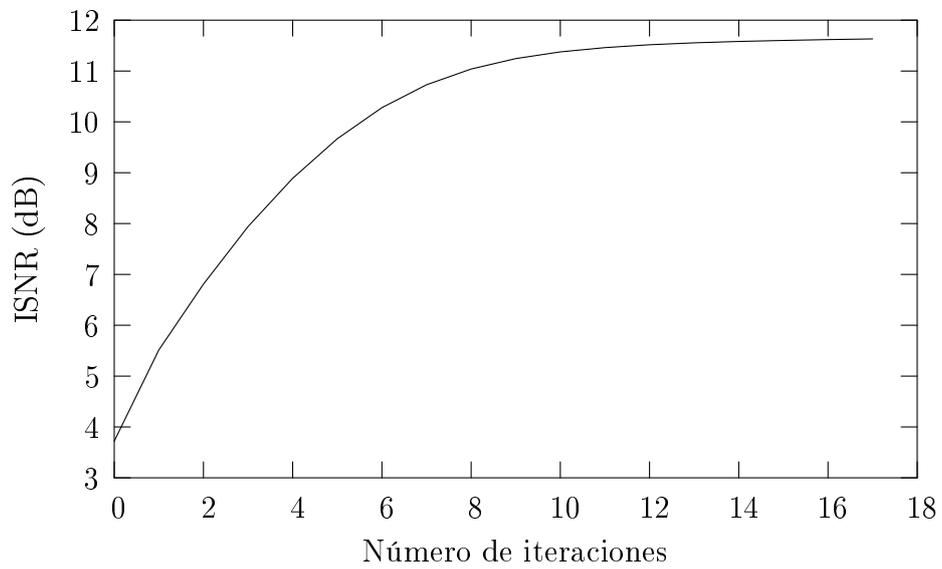


Figura 5.5: (a) Imagen original de alta resolución, (b) Supermuestreo por reduplicación de píxeles de  $g_{00}$ , (c) Imagen inicial de alta resolución, (d) Imagen estimada de alta resolución.



(a)



(b)

Figura 5.6: (a) Criterio de convergencia frente al número de iteraciones, (b) ISNR frente al número de iteraciones, para la imagen de la figura 5.5d.



# Conclusiones y trabajos futuros

He muerto y he resucitado.  
Con mis cenizas un árbol he plantado,  
su fruto ha dado  
y desde hoy algo ha empezado.

Enrique Urquijo (1960–1999)

## Conclusiones

- Se han presentado diferentes métodos bayesianos de restauración de imágenes usando descomposiciones multicanal que estiman los valores de los parámetros asociados a los modelos de forma automática.
- Se ha presentado un método iterativo multicanal para la restauración de imágenes usando modelos de Gauss-Markov Generalizados. Este método, que se puede formular como un método de gradiente, no requiere el cálculo del paso óptimo del gradiente. Además, aprovecha la estructura de las matrices involucradas para reducir el coste computacional mediante su diagonalización usando la Transformada de Fourier Discreta.
- Se ha mostrado experimentalmente que el método que proponemos produce mejores resultados que otros métodos que usan los modelos de Gauss-Markov Generalizados monocanal y multicanal propuestos en la literatura.
- Se ha presentado un método de restauración de imágenes basado en la descomposición multicanal de modelos de imagen autorregresivos. El modelo de imagen

propuesto es más flexible que los modelos autorregresivos clásicos al asociar un parámetro diferente a cada una de las bandas resultantes de la descomposición wavelet del modelo monocanal.

- Los resultados experimentales obtenidos muestran la mejora lograda con este enfoque multicanal frente al monocanal. Además, la flexibilidad del modelo, que permite asociar un parámetro a la banda suave y otro a las bandas de frecuencias altas, hace posible obtener los mejores resultados tanto a nivel de ISNR como de calidad visual.
- Se ha presentado un método bayesiano de reconstrucción de imágenes de alta resolución con multisensores que realiza la estimación simultánea de la imagen de alta resolución y de los parámetros asociados al método.
- Se ha mostrado experimentalmente que el método produce buenas reconstrucciones de las imágenes de alta resolución, estimando de forma precisa los parámetros y mejorando, tanto visualmente como a nivel de ISNR, los resultados obtenidos por otros métodos de estimación de parámetros propuestos en la literatura.

## Trabajos futuros

- Formulación de nuevos modelos de imagen multicanal que permitan el uso de submodelos diferentes para cada una de las bandas de la descomposición de la imagen.
- Estudio del uso de otras descomposiciones subbanda que posean mejores propiedades que la transformada wavelet considerada.
- Estudio de métodos de reconstrucción de imágenes de alta resolución en el caso de disponer de sólo algunas de las imágenes observadas de baja resolución.
- Extensión del modelo de formación de las imágenes de baja resolución para la inclusión de emborronamiento producido por el sistema de captación.

- Aplicación de los métodos de reconstrucción de imágenes de alta resolución a imágenes en color captadas mediante cámaras con una única CCD (tipo Bayer).
- Aplicación del método de reconstrucción de imágenes de alta resolución propuesto a imágenes astronómicas.



# Apéndice A

## Estructuras matriciales para el filtrado lineal multicanal

Desgraciadamente, nadie puede decirte qué es Matrix, tienes que verlo por ti mismo.

Morfeo, en *Matrix*, de Andy y Larry Wachowski

### A.1. Matrices por bloques circulantes y matrices circulantes por bloques

El filtrado lineal multicanal hace referencia a sistemas lineales de múltiples entradas y múltiples salidas ([45]). En estos sistemas se aplican diferentes operadores lineales espacialmente invariantes a todas las entradas para producir cada una de las salidas. En cualquier caso, el sistema completo puede verse como una entidad única, como se muestra en la figura A.1.

Supondremos que el sistema tiene  $P$  entradas y  $P$  salidas. Sean  $f_i$  e  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, P$ , vectores de tamaño  $N \times 1$ , que constituyen las entradas y salidas del sistema multicanal. Si los vectores de entrada y salida multicanal vienen dados por

$$\mathbf{f} = [f_1(0), \dots, f_1(N-1), f_2(0), \dots, f_2(N-1), \dots, f_P(0), \dots, f_P(N-1)]^T, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{y} = [y_1(0), \dots, y_1(N-1), y_2(0), \dots, y_2(N-1), \dots, y_P(0), \dots, y_P(N-1)]^T, \quad (\text{A.2})$$

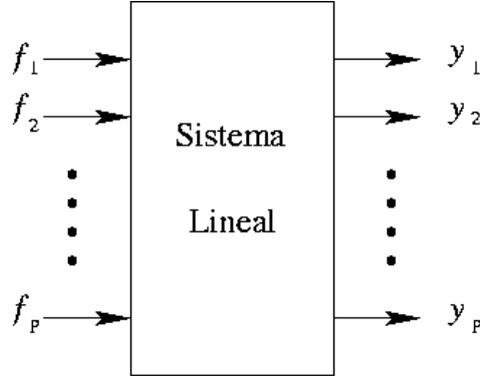


Figura A.1: Sistema lineal multicanal

la relación entrada-salida de este sistema puede representarse en forma matricial como:

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{f}, \quad (\text{A.3})$$

donde

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,P} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{P,1} & A_{P,2} & \cdots & A_{P,P} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

y las submatrices  $A_{i,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq P$ , son matrices circulantes de tamaño  $N \times N$  que representan el  $(i, j)$ -ésimo componente de la respuesta al impulso del sistema de la figura A.1. Los vectores se suponen convenientemente rellenos de ceros para que la convolución lineal y circular sean equivalentes. Denominaremos la matriz  $PN \times PN$   $\tilde{\mathbf{A}}$  como matriz por bloques circulantes (BC) de orden  $(P, N)$  ([75]). Estas estructuras matriciales ya han sido empleadas anteriormente en problemas de restauración de imágenes multicanal (véanse, por ejemplo, [8], [50], [52] y [122]).

Podemos plantear una formulación dual y equivalente de este sistema lineal multicanal si la entrada y la salida se organizan de forma entrelazada ([70], [75]). Si  $\mathbf{f}_e$  e  $\mathbf{y}_e$  se definen como

$$\mathbf{f}_e = [f_1(0), f_2(0), \dots, f_P(0), f_1(1), \dots, f_P(1), \dots, f_1(N-1), \dots, f_P(N-1)]^T, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{y}_e = [y_1(0), y_2(0), \dots, y_P(0), y_1(1), \dots, y_P(1), \dots, y_1(N-1), \dots, y_P(N-1)]^T, \quad (\text{A.6})$$

el sistema lineal multicanal se puede describir mediante la relación

$$\mathbf{y}_e = \mathbf{A}\mathbf{f}_e, \quad (\text{A.7})$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{N-1} \\ A_{N-1} & A_0 & \cdots & A_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

y las submatrices  $A_i$ ,  $0 \leq i \leq N - 1$ , son matrices arbitrarias de tamaño  $P \times P$ . La matriz  $\mathbf{A}$ , de tamaño  $PN \times PN$  se denominará matriz circulante por bloques (CB) de orden  $(P, N)$  ([70], [75]).

## A.2. Diagonalización de matrices particionadas

Es bien sabido que una matriz circulante se puede diagonalizar mediante el uso de la Transformada de Fourier Discreta (*DFT: Discrete Fourier Transform*) ([56]).

Por extensión de la diagonalización de las matrices circulantes, podemos comprobar que, empleando la Transformada de Fourier Matricial Discreta, podemos transformar una matriz CB  $(P, N)$  en una matriz diagonal por bloques, en la que sólo los bloques situados en la diagonal principal son distintos de cero. Cada uno de los bloques, de tamaño  $P \times P$ , situados a lo largo de la diagonal de esta matriz se puede expresar como:

$$\mathbf{A}_{DFT}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n \exp\left(\frac{-j2\pi nk}{N}\right), \quad 0 \leq k \leq N - 1, \quad (\text{A.9})$$

donde  $A_n$  hace referencia a cada una de las matrices de tamaño  $P \times P$  de la ecuación A.8. Esta relación entre matrices CB y matrices diagonales por bloques está gobernada por la transformación de similitud

$$\mathbf{A} = \Omega\Theta_{\mathbf{A}}\Omega^{-1}, \quad (\text{A.10})$$

donde  $\Theta_{\mathbf{A}}$  es una matriz diagonal por bloques dada por

$$\Theta_{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \Theta_{0,0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Theta_{1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Theta_{N-1,N-1} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

y cada una de las submatrices  $\Theta_{i,i}$ ,  $0 \leq i \leq N-1$ , está formada por los autovalores de cada una de las matrices circulantes implícitamente contenidas en  $\mathbf{A}$ .  $\Omega^{-1}$  es una matriz que contiene los componentes de las funciones base exponenciales complejas de la DFT organizados diagonalmente en bloques de tamaño  $P \times P$  de la siguiente forma:

$$\Omega^{-1} = \begin{bmatrix} \epsilon_{0,0}I_P & \epsilon_{0,1}I_P & \cdots & \epsilon_{0,N-1}I_P \\ \epsilon_{1,0}I_P & \epsilon_{1,1}I_P & \cdots & \epsilon_{1,N-1}I_P \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{N-1,0}I_P & \epsilon_{N-1,1}I_P & \cdots & \epsilon_{N-1,N-1}I_P \end{bmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

donde  $I_P$  es la matriz identidad de tamaño  $P \times P$  y  $\epsilon_{p,q} = \exp(-j(2\pi pq)/N)$  ([75]). Cada una de las submatrices  $\Theta_{i,i}$ ,  $0 \leq i \leq N-1$ , se obtiene tomando la DFT matricial de la primera fila de submatrices de  $\mathbf{A}$ . Puesto que estas submatrices contienen las respuestas al impulso del sistema dentro de cada canal y entre canales, las matrices  $\Theta_{i,i}$  contendrán las correspondientes respuestas en frecuencia del mismo.

Si volvemos ahora a la formulación de las matrices BC  $(P, N)$ , éstas pueden transformarse en matrices por bloques diagonales, esto es, matrices de tamaño  $PN \times PN$  particionadas en  $P^2$  bloques diagonales de tamaño  $N \times N$  en el dominio frecuencial ([75]). La estructura de estas matrices por bloques diagonales es

$$\Theta_{\tilde{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \Theta_{1,1} & \Theta_{1,2} & \cdots & \Theta_{1,P} \\ \Theta_{2,1} & \Theta_{2,2} & \cdots & \Theta_{2,P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta_{P,1} & \Theta_{P,2} & \cdots & \Theta_{P,P} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

donde las submatrices  $\Theta_{i,j}$  son matrices diagonales de tamaño  $N \times N$ ,  $1 \leq i, j \leq P$ .

La transformación de similitud que gobierna la relación entre las matrices BC y las matrices por bloques diagonales viene dada por

$$\tilde{\mathbf{A}} = \Omega' \Theta_{\tilde{\mathbf{A}}} \Omega'^{-1}, \quad (\text{A.14})$$

donde  $\Omega'^{-1}$  es una matriz  $PN \times NP$  diagonal por bloques con P bloques idénticos de tamaño  $N \times N$ ,  $E^{-1}$ , a lo largo de la diagonal, que contienen los coeficientes de la DFT

$$\Omega'^{-1} = \begin{bmatrix} E^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & E^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

El  $(p, q)$ -ésimo término de  $E^{-1}$  se define como

$$E^{-1}(p, q) = \epsilon_{pq} = \exp\left(\frac{-j2\pi pq}{N}\right). \quad (\text{A.16})$$

Por lo tanto, podemos obtener la representación por bloques diagonales de las matrices BC empleando la DFT de forma similar al caso de las matrices CB, discutido anteriormente ([75]).

Se ha demostrado que tanto las matrices BC como las CB son cerradas bajo las operaciones de suma, producto e inversión y, además, que se pueden realizar implementaciones rápidas de estas operaciones en el dominio frecuencial ([70], [75]). Estas propiedades nos resultarán útiles cuando formulemos el problema de la restauración en el dominio wavelet, ya que nos aportarán sencillez notacional e implementaciones eficientes. Por ejemplo, la reducción a formas diagonales resulta especialmente útil en la inversión de matrices CB, ya que sólo supone N inversiones de matrices de tamaño  $P \times P$ , como ya se discutió por primera vez en [52]. Por otro lado, la formulación del problema nos resultará mucho menos compleja empleando matrices BC, como veremos en el apéndice B.



## Apéndice B

# Descomposición multicanal de señales y operadores de convolución

Tu vida es la suma del remanente de una ecuación desequilibrada inherente a la programación de Matrix. Eres la eventualidad de una anomalía, que a pesar de mis más sinceros esfuerzos me ha sido imposible eliminar, de lo que de otra manera sería una armonía de precisión matemática.

El arquitecto, en *Matrix Reloaded*, de Andy y Larry Wachowski

### B.1. Introducción

En este apéndice vamos a presentar una formulación matricial de la descomposición sub-banda basada en wavelets, basada en los conceptos de matrices por bloques circulantes (BC) y matrices circulantes por bloques (CB) ilustrados en el apéndice A.

Esta formulación nos permitirá la conversión de cualquier problema de filtrado lineal espacialmente invariante monocanal en uno multicanal. En concreto, en el problema de restauración este enfoque nos va a permitir emplear una imagen monocanal con cualquier técnica de restauración multicanal, o formular un modelo de imagen multicanal que nos permita incluir relaciones dentro de cada canal y entre los diferentes canales de la imagen original descompuesta. Los canales que vamos a considerar son las

sub-bandas generadas por la descomposición wavelet de la imagen.

Este marco de trabajo nos va a permitir definir algoritmos de restauración eficientes y modelos de imagen no estacionarios. Aunque estamos considerando que hay estacionaridad dentro de los diferentes canales, la posibilidad de elegir el número de canales de la descomposición wavelet, y, por lo tanto, de reducir la estacionaridad de los algoritmos y modelos de imagen, nos permitirá establecer un equilibrio entre estacionaridad y complejidad computacional.

En el problema de la reconstrucción de imágenes de alta resolución, podremos formular el problema de manera que sea posible diseñar algoritmos eficientes ya que podremos realizar los cálculos en el dominio de las frecuencias.

## B.2. Descomposición multicanal de señales y operadores de convolución unidimensionales

La descomposición de una señal unidimensional en dos canales se puede realizar mediante el banco de filtros que se muestra en la figura B.1

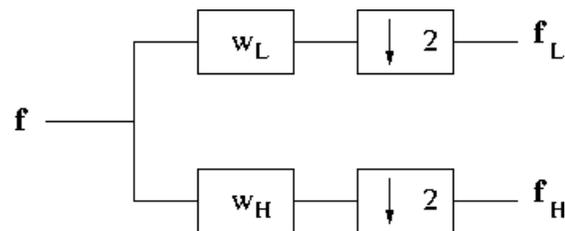


Figura B.1: Descomposición de una señal unidimensional

Esta figura representa una descomposición ortogonal sub-banda en la que tenemos el mismo número total de muestras en la entrada y en la salida. Podemos escribir una representación matricial de este sistema lineal en función de la ordenación de los vectores de salida correspondientes a las sub-bandas.

Vamos a considerar en primer lugar la estructura matricial necesaria para multiplicar los datos originales, sin reordenarlos. Esta relación se puede escribir en forma de una

matriz CB  $(2, N/2)$ :

$$W\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}}_e, \quad (\text{B.1})$$

donde  $\mathbf{f}$  es un vector  $N \times 1$  que contiene las muestras de la señal de entrada y  $W$  es una matriz  $N \times N$ . Si  $w_L(i)$  y  $w_H(i)$  representan las respuestas al impulso de los filtros lineales espacialmente invariantes paso-baja y paso-alta empleados en este banco de filtros, para convoluciones circulares  $W$  viene dada por

$$W = \begin{bmatrix} w_L(0) & w_L(1) & w_L(2) & w_L(3) & \cdots & w_L(N-2) & w_L(N-1) \\ w_H(0) & w_H(1) & w_H(2) & w_H(3) & \cdots & w_H(N-2) & w_H(N-1) \\ w_L(N-2) & w_L(N-1) & w_L(0) & w_L(1) & \cdots & w_L(N-4) & w_L(N-3) \\ w_H(N-2) & w_H(N-1) & w_H(0) & w_H(1) & \cdots & w_H(N-4) & w_H(N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ w_L(2) & w_L(3) & w_L(4) & w_L(5) & \cdots & w_L(0) & w_L(1) \\ w_H(2) & w_H(3) & w_H(4) & w_H(5) & \cdots & w_H(0) & w_H(1) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

que es una matriz CB  $(2, N/2)$ .

Es importante destacar que si los filtros paso-baja y paso-alta son de soporte compacto, muchos de los coeficientes de la matriz  $W$  serán cero.

La señal de salida,  $\tilde{\mathbf{f}}_e$ , contiene las muestras de las bandas alta y baja submuestreadas de forma entrelazada y podemos expresarla como

$$\tilde{\mathbf{f}}_e = [f_L(0), f_H(0), f_L(1), f_H(1), \dots, f_L(N/2-1), f_H(N/2-1)]^T \quad (\text{B.3})$$

Estudiemos ahora el caso dual, en el que reordenaremos el vector de salida para obtener ésta de forma no entrelazada. Definiremos una matriz,  $D$  de tamaño  $N \times N$ ,

de “desentrelazamiento” como

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N/2 - 2 \\ N/2 - 1 \\ N/2 \\ N/2 + 1 \\ \vdots \\ N - 2 \\ N - 1 \end{matrix} \quad (\text{B.4})$$

Podemos comprobar que se cumple

$$DD^T = D^T D = I_N, \quad (\text{B.5})$$

donde  $I_N$  es la matriz identidad  $N \times N$ .

También podemos ver el resultado de aplicar la matriz  $D$  sobre el vector de entrada y sobre su versión entrelazada:

$$\begin{aligned} D\mathbf{f} &= f_D \\ &= [f(0), f(2), \dots, f(N-2), f(1), f(3), \dots, f(N-1)]^T \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} D\tilde{\mathbf{f}}_e &= \tilde{\mathbf{f}} \\ &= [f_L(0), f_L(1), \dots, f_L(N/2-1), f_H(0), f_H(1), \dots, f_H(N/2-1)]^T \\ &= [f_L^T, f_H^T]^T \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$f_L$  y  $f_H$  son vectores  $N/2 \times 1$  que contienen las muestras ordenadas de las señales de salida baja y alta submuestreadas. Obsérvese que la ecuación B.7 tiene la misma ordenación de elementos que la ecuación A.1.

Utilizando estas definiciones podemos transformar la ecuación B.1 de la siguiente

forma:

$$\begin{aligned} (D W D^T) (D \mathbf{f}) &= (D \tilde{\mathbf{f}}_e) \\ \tilde{W} \mathbf{f}_D &= \tilde{\mathbf{f}}, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

donde  $\tilde{W}$  viene dada por

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} W_L^P & W_L^I \\ W_H^P & W_H^I \end{bmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

donde

$$\begin{aligned} W_L^P &= \begin{bmatrix} w_L(0) & w_L(2) & \cdots & w_L(N-2) \\ w_L(N-2) & w_L(0) & \cdots & w_L(N-4) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_L(2) & \cdots & w_L(N-2) & w_L(0) \end{bmatrix} \\ W_L^I &= \begin{bmatrix} w_L(1) & w_L(3) & \cdots & w_L(N-1) \\ w_L(N-1) & w_L(1) & \cdots & w_L(N-3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_L(3) & \cdots & w_L(N-1) & w_L(1) \end{bmatrix} \\ W_H^P &= \begin{bmatrix} w_H(0) & w_H(2) & \cdots & w_H(N-2) \\ w_H(N-2) & w_H(0) & \cdots & w_H(N-4) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_H(2) & \cdots & w_H(N-2) & w_H(0) \end{bmatrix} \\ W_H^I &= \begin{bmatrix} w_H(1) & w_H(3) & \cdots & w_H(N-1) \\ w_H(N-1) & w_H(1) & \cdots & w_H(N-3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_H(3) & \cdots & w_H(N-1) & w_H(1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Las matrices  $W_L^P$ ,  $W_L^I$ ,  $W_H^P$  y  $W_H^I$  son matrices circulantes  $N/2 \times N/2$ . Sin embargo, la matriz  $\tilde{W}$  no es circulante, ya que  $W_L^P \neq W_H^I$ , por lo que es una matriz BC (2,  $N/2$ ).

Para poder usar  $\tilde{W}$  en la descomposición multicanal de problemas monocanal, este operador debe poder definirse de forma sencilla y su inversa debe ser fácil de calcular. Si

seleccionamos  $w_L$  y  $w_H$  como los filtros especulares en cuadratura basados en las bases ortonormales wavelet de soporte compacto, podemos usar un conjunto de coeficientes para definir ambos filtros ([147]). Además, su inversa será precisamente su transpuesta, esto es,  $\tilde{W}^{-1} = \tilde{W}^T$ , y por lo tanto, junto con  $\tilde{W}$  se puede implementar mediante filtros de respuesta al impulso finita (*FIR: Finite Impulse Response*).

Podemos descomponer el operador de convolución,  $\mathbf{H}$ , de la ecuación (2.16) usando cualquiera de las dos representaciones de la matriz de filtrado, BC o CB, que acabamos de ver. Si ignoramos el término de ruido, el operador de convolución se puede transformar al dominio wavelet de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{H}\mathbf{f} \\ W\mathbf{y} &= WHW^T W\mathbf{f} \\ \tilde{\mathbf{y}}_e &= \tilde{\mathbf{H}}_e \tilde{\mathbf{f}}_e \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Resulta directo observar que  $\tilde{\mathbf{H}}_e$  es una matriz CB  $(2, N/2)$ , ya que se obtiene como el producto de tres matrices CB  $(2, N/2)$ , puesto que  $\mathbf{H}$  es también una matrix CB  $(2, N/2)$  al ser una matriz circulante.

De la misma forma podemos transformar la convolución al dominio wavelet usando la formulación BC. Tendremos ahora:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \mathbf{H}\mathbf{f} \\ (\tilde{W}D)\mathbf{g} &= (\tilde{W}D)\mathbf{H}(D^T\tilde{W}^T)(\tilde{W}D)\mathbf{f}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Se puede ver que, para una matriz circulante,  $\mathbf{H}$ , de tamaño  $N \times N$ , que representa la convolución de una señal  $N \times 1$  con el núcleo

$$\dots, h(-2), h(-1), h(0), h(1), h(2), \dots \quad (\text{B.13})$$

centrado en 0, tenemos que

$$\mathbf{H}_D = D\mathbf{H}D^t = \begin{bmatrix} H_0 & H_1 \\ H_{-1} & H_0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.14})$$

donde  $H_i$  es una matriz circulante de tamaño  $N/2 \times N/2$  que representa la convolución de una señal  $N/2 \times 1$  con el núcleo de convolución

$$\dots, h(i-4), h(i-2), h(i), h(i+2), h(i+4), \dots \quad (\text{B.15})$$

centrado en  $i$ .

Por lo tanto, al aplicar  $D$  al operador de convolución estamos descomponiendo éste en cuatro operadores de convolución,  $H_i$ , cada uno de la mitad de tamaño, definidos como los coeficientes pares e impares del operador original y desplazados convenientemente.

Teniendo en cuenta la descomposición que hemos obtenido de  $\mathbf{H}$ , podemos seguir desarrollando la ecuación (B.12)

$$\begin{aligned} \tilde{W}\mathbf{g}_D &= \tilde{W}\mathbf{H}_D\tilde{W}^T \tilde{W}\mathbf{f}_D \\ \tilde{\mathbf{g}} &= \tilde{W}\mathbf{H}_D\tilde{W}^T\tilde{\mathbf{f}} \\ \tilde{\mathbf{g}} &= \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{f}} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$\tilde{\mathbf{f}}$  y  $\tilde{\mathbf{g}}$  son la señal original y la convolucionada, ambas en el dominio wavelet.  $\tilde{\mathbf{H}}$  es el operador de convolución transformado. Puesto que  $W$  y  $\mathbf{H}_D$  son matrices BC  $(2, N/2)$ ,  $\tilde{\mathbf{H}}$  también es BC  $(2, N/2)$ , por lo que esta descomposición de  $\mathbf{H}$  se puede realizar de forma directa en el dominio de las frecuencias mediante el uso de la DFT.

### B.3. Descomposición multicanal de señales y operadores de convolución bidimensionales

A partir de la descomposición unidimensional de la señal en dos canales desarrollada en la sección anterior podemos ahora desarrollar una descomposición bidimensional si aplicamos de forma separada los operadores  $w_L$  y  $w_H$  en las direcciones horizontal y vertical de una señal bidimensional. Nos centraremos en la extensión bidimensional de la formulación BC del modelo de descomposición de la señal, ya que será esta formulación la que empleemos para realizar el desarrollo de nuestros modelos de imagen y algoritmos de restauración. Por supuesto, es posible formular la equivalente extensión

de la formulación CB, pero sólo la describiremos brevemente dada su complejidad y el hecho de que no será utilizada en esta memoria.

Para una señal de tamaño  $N \times N$ ,  $\mathbf{f}(x, y)$ , un nivel de esta descomposición generará cuatro canales  $N/2 \times N/2$ , como podemos ver en la figura B.2.

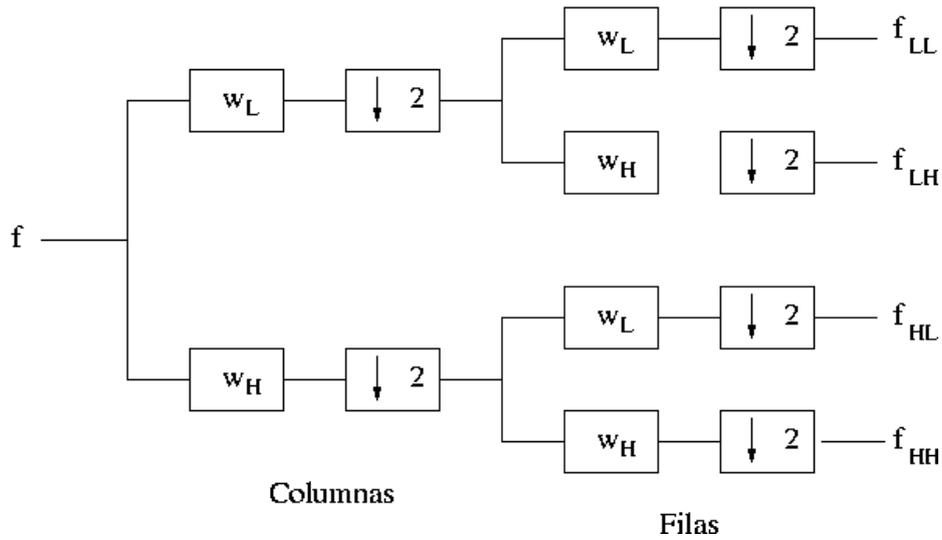


Figura B.2: Descomposición de una señal bidimensional

Para representar las operaciones involucradas en esta descomposición en dos dimensiones emplearemos en primer lugar la representación mediante matrices BC. Por lo tanto, tendremos que plantear la ordenación de los datos de entrada del banco de filtros de forma análoga a la ecuación B.7. Podemos usar para ello el esquema proporcionado por la ecuación B.8. Si consideramos la señal bidimensional  $N \times N$  ordenada lexicográficamente por filas para ubicarla en un vector  $N^2 \times 1$ ,  $\mathbf{f}$ , entonces se puede comprobar que el vector  $\tilde{\mathbf{f}}$  viene dado por

$$\tilde{\mathbf{f}} = [f_{LL}^T, f_{LH}^T, f_{HL}^T, f_{HH}^T]^T, \quad (\text{B.17})$$

donde  $f_{ij}$ ,  $i, j = L, H$ , son los cuatro canales bidimensionales de tamaño  $N/2 \times N/2$  ordenados lexicográficamente por filas. Los índices  $i$  y  $j$  corresponderán al filtrado en las direcciones horizontal y vertical, de forma que, por ejemplo,  $f_{HL}$  será el canal obtenido mediante un filtro paso-alta en la dirección horizontal y un filtro paso-baja en la dirección vertical.

El vector  $\mathbf{f}_D$  vendrá dado en el caso bidimensional por:

$$\mathbf{f}_D = [\mathbf{f}_{PP}^T, \mathbf{f}_{PI}^T, \mathbf{f}_{IP}^T, \mathbf{f}_{II}^T]^T, \quad (\text{B.18})$$

donde  $f_{ij}$ ,  $i, j = P, I$ , son las cuatro subimágenes bidimensionales de tamaño  $N/2 \times N/2$  ordenadas lexicográficamente por filas obtenidas mediante el submuestreo en las direcciones horizontal y vertical, manteniendo las muestras pares o impares. Por ejemplo,  $f_{PI}$  será la subimagen obtenida seleccionando los píxeles de índice par en la dirección horizontal e impar en la dirección vertical.

Puesto que el filtrado se aplica de forma separada en las direcciones horizontal y vertical, la matriz  $\tilde{W}$  en el caso bidimensional puede representarse como el producto  $\tilde{W} = \tilde{W}_h \tilde{W}_v$ , correspondiendo  $\tilde{W}_h$  y  $\tilde{W}_v$  al filtrado en las direcciones horizontal y vertical.  $\tilde{W}_h$  y  $\tilde{W}_v$  serán matrices  $N^2 \times N^2$  definidas como:

$$W_h = \begin{bmatrix} W_{(L,h)}^P & 0 & W_{(L,h)}^I & 0 \\ 0 & W_{(L,h)}^P & 0 & W_{(L,h)}^I \\ W_{(H,h)}^P & 0 & W_{(H,h)}^I & 0 \\ 0 & W_{(H,h)}^E & 0 & W_{(H,h)}^I \end{bmatrix}, \quad (\text{B.19})$$

$$W_v = \begin{bmatrix} W_{(L,v)}^P & W_{(L,v)}^I & 0 & 0 \\ W_{(H,v)}^P & W_{(H,v)}^I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_{(L,v)}^P & W_{(L,v)}^I \\ 0 & 0 & W_{(H,v)}^P & W_{(H,v)}^I \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

donde las submatrices de tamaño  $N^2/4 \times N^2/4$ ,  $W_{(i,x)}^j$ ,  $i = L, H$ ,  $j = P, I$  se definen como

$$W_{(i,x)}^j = W_i^j \otimes I_{N/2}, \quad (\text{B.21})$$

representando  $\otimes$  el producto de Kronecker y siendo las matrices  $W_{(i,x)}^j$  las submatrices circulantes de tamaño  $N/2 \times N/2$  de la ecuación (B.10). De forma similar, las submatrices  $N^2/4 \times N^2/4$ ,  $W_{(i,y)}^j$ ,  $i = L, H$ ,  $j = P, I$  se definen como

$$W_{(i,x)}^j = W_i^j \otimes I_{N/2}. \quad (\text{B.22})$$

Por lo tanto, la matriz  $\tilde{W}$  tiene la siguiente estructura:

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} W_{(L,h)}^P W_{(L,v)}^P & W_{(L,h)}^P W_{(L,v)}^I & W_{(L,h)}^I W_{(L,v)}^P & W_{(L,h)}^I W_{(L,v)}^I \\ W_{(L,h)}^P W_{(H,v)}^P & W_{(L,h)}^P W_{(H,v)}^I & W_{(L,h)}^I W_{(H,v)}^P & W_{(L,h)}^I W_{(H,v)}^I \\ W_{(H,h)}^P W_{(L,v)}^P & W_{(H,h)}^P W_{(L,v)}^I & W_{(H,h)}^I W_{(L,v)}^P & W_{(H,h)}^I W_{(L,v)}^I \\ W_{(H,h)}^P W_{(H,v)}^P & W_{(H,h)}^P W_{(H,v)}^I & W_{(H,h)}^I W_{(H,v)}^P & W_{(H,h)}^I W_{(H,v)}^I \end{bmatrix}. \quad (\text{B.23})$$

Puesto que las matrices  $W_{(i,k)}^j$ ,  $i = L, H$ ,  $j = P, I$ ,  $k = x, y$ , se definen como productos de Kronecker de dos matrices circulantes  $N/2 \times N/2$ , son matrices circulantes por bloques  $N^2/4 \times N^2/4$  ([60], [134]). Sin embargo, las matrices por bloques de tamaño  $N^2 \times N^2$   $\tilde{W}_y$  y  $\tilde{W}_x$  no son circulantes. Estas matrices constituyen una extensión del caso unidimensional y las denominaremos matrices por bloques circulantes de nivel 2 (BC2) de orden  $(4, N^2/4)$ , poseyendo las mismas propiedades que las matrices BC cuando se transforman mediante la DFT bidimensional ([50], [70], [75]).

La representación dual en el caso bidimensional de la matriz  $\tilde{W}$  es una matriz circulante por bloques de nivel 2 (CB2) de orden  $(4, N^2/4)$  ([8], [11]), una matriz circulante al nivel de bloque más externo con submatrices de tamaño  $N/2 \times N/2$  que son CB  $(4, N/2)$ . La extensión de la estructura unidimensional de la ecuación (A.4) para el filtrado lineal bidimensional será:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{M-1} \\ A_{M-1} & A_0 & \cdots & A_{M-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.24})$$

Cada una de las submatrices,  $A_k$  es CB  $(P, N)$  y  $\mathbf{B}$  es CB2  $(P, MN)$ .  $\mathbf{B}$  se puede diagonalizar por bloques mediante el uso de la DFT de forma análoga al caso bidimensional.

La representación CB2 de la descomposición wavelet produce una salida entrelazada:

$$WT\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}}_e, \quad (\text{B.25})$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}_e = & [f_{LL}(0, 0), f_{LH}(0, 0), f_{HL}(0, 0), f_{HH}(0, 0), \\ & f_{LL}(0, 1), f_{LH}(0, 1), f_{HL}(0, 1), f_{HH}(0, 1), \\ & \dots \\ & f_{LL}(\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 2), f_{LH}(\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 2), f_{HL}(\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 2), f_{HH}(\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 2), \\ & f_{LL}(\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 1), f_{LH}(\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 1), f_{HL}(\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 1), f_{HH}(\frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} - 1)]^T \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$W$  es una matriz CB2  $(4, N^2/4)$  y  $T$  es una matriz de tamaño  $N^2 \times N^2$ , de “reordenación”, que se encargará de agrupar cada grupo de cuatro píxeles vecinos de la imagen de entrada en un vector, y que verifica:  $T^T T = I_{N^2}$ .

El desarrollo de la estructura de esta formulación de la matriz de coeficientes wavelet,  $W$ , y su justificación se pueden encontrar en [8], [11] y [75].

En cuanto al operador de convolución bidimensional,  $\mathbf{H}$ , se puede mostrar su descomposición a través de la formulación CB2. Supongamos que  $\mathbf{H}$  es una matriz circulante por bloques de tamaño  $N^2 \times N^2$  que representa la convolución bidimensional de una señal  $N \times N$  con la siguiente máscara, centrada en  $(0, 0)$ :

$$\begin{array}{cccccc} & \vdots & \\ \dots & h(-2, -2) & h(-2, -1) & h(-2, 0) & h(-2, 1) & h(-2, 2) & \dots & & & & \\ \dots & h(-1, -2) & h(-1, -1) & h(-1, 0) & h(-1, 1) & h(-1, 2) & \dots & & & & \\ \dots & h(0, -2) & h(0, -1) & h(0, 0) & h(0, 1) & h(0, 2) & \dots & & & & \\ \dots & h(1, -2) & h(1, -1) & h(1, 0) & h(1, 1) & h(1, 2) & \dots & & & & \\ \dots & h(2, -2) & h(2, -1) & h(2, 0) & h(2, 1) & h(2, 2) & \dots & & & & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & \end{array} \quad (\text{B.27})$$

Si seguimos el mismo esquema que en el caso unidimensional, desarrollado en las ecuaciones (B.12) a (B.16), podemos comprobar que (B.16) sigue cumpliéndose para operadores de convolución bidimensionales. Ahora tendremos que  $\tilde{\mathbf{g}}$  es un vector  $N^2 \times 1$  de la misma forma que  $\tilde{\mathbf{f}}$  en (B.17), y que  $\mathbf{H}_D$  tiene la siguiente estructura:

$$\mathbf{H}_D = \begin{bmatrix} H_{(0,0)} & H_{(0,-1)} & H_{(1,0)} & H_{(1,-1)} \\ H_{(0,1)} & H_{(0,0)} & H_{(1,1)} & H_{(1,0)} \\ H_{(-1,0)} & H_{(-1,-1)} & H_{(0,0)} & H_{(0,-1)} \\ H_{(-1,1)} & H_{(-1,0)} & H_{(0,1)} & H_{(0,0)} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.28})$$

donde  $H_{(i,j)}$  son matrices circulantes por bloques de tamaño  $N^2/4 \times N^2/4$  que representan la convolución de una señal bidimensional  $N/2 \times N/2$  con el núcleo de convolución centrado en  $(i,j)$

$$\begin{array}{cccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & h(i-4, j-4) & h(i-4, j-2) & h(i-4, j) & h(i-4, j+2) & h(i-4, j+4) & \cdots \\ \cdots & h(i-2, j-4) & h(i-2, j-2) & h(i-2, j) & h(i-2, j+2) & h(i-2, j+4) & \cdots \\ \cdots & h(i, j-4) & h(i, j-2) & h(i, j) & h(i, j+2) & h(i, j+4) & \cdots \\ \cdots & h(i+2, j-4) & h(i+2, j-2) & h(i+2, j) & h(i+2, j+2) & h(i+2, j+4) & \cdots \\ \cdots & h(i+4, j-4) & h(i+4, j-2) & h(i+4, j) & h(i+4, j+2) & h(i+4, j+4) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \quad (\text{B.29})$$

Podemos ver que  $\mathbf{H}_D$  es una matriz BC2  $(4, N^2/4)$ . Además, sigue cumpliéndose en el caso bidimensional

$$\begin{aligned} \tilde{W} \mathbf{g}_D &= \tilde{W} \mathbf{H}_D \tilde{W}^T \tilde{W} \mathbf{f}_D \\ \tilde{\mathbf{g}} &= \tilde{W} \mathbf{H}_D \tilde{W}^T \tilde{\mathbf{f}} \\ \tilde{\mathbf{g}} &= \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{f}}, \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

siendo ahora la matriz  $\tilde{\mathbf{H}}$  una matriz BC2  $(4, N^2/4)$ , por lo que todas las propiedades de  $\tilde{\mathbf{H}}$  en el dominio de las frecuencias siguen cumpliéndose en el caso bidimensional.

## B.4. Estructuras matriciales involucradas en la formulación del problema de reconstrucción de imágenes de alta resolución con multisensores

Si revisamos la formulación del problema de obtención de imágenes de alta resolución con multisensores que hemos desarrollado en la sección 2.3, comprobaremos que cada imagen de baja resolución,  $\mathbf{g}_{l1,l2}$ , de tamaño  $(N_1 \times N_2) \times 1$ , observada por el  $(l1, l2)$ -ésimo sensor a partir de la imagen original  $(M_1 \times M_2) \times 1$ ,  $\mathbf{f}$ , se forma según la siguiente ecuación (obviando el término de ruido):

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{l1,l2} &= \mathbf{W}_{l1,l2} \mathbf{f} \\ &= \mathbf{D}_{l1,l2} \mathbf{H}_{l1,l2} \mathbf{f}, \end{aligned} \tag{B.31}$$

donde, recordemos,  $\mathbf{W}_{l1,l2}$  es la matriz  $(N_1 \times N_2) \times (M_1 \times M_2)$  que recoge los operadores de integración,  $\mathbf{H}_{l1,l2}$ , y submuestreo,  $\mathbf{D}_{l1,l2}$ , descritos en las ecuaciones (2.20) y (2.27).

Por simplicidad, vamos a considerar el caso unidimensional. Concentrémonos en la formación de una de las imágenes de baja resolución, por ejemplo,  $\mathbf{g}_0$  que se formará como

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{W}_0 \mathbf{f} = \mathbf{D}_0 \mathbf{H}_0 \mathbf{f}. \tag{B.32}$$

Veamos la estructura de cada una de las matrices involucradas. Si  $\mathbf{f}$  es de tamaño  $N \times 1$ , veamos cómo se obtiene  $\mathbf{g}_0$ , de tamaño  $N/2 \times 1$ :

$$\begin{bmatrix} g_0(0) \\ g_0(1) \\ \vdots \\ g_0(N/2-2) \\ g_0(N/2-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}(0) \\ \mathbf{f}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(N-2) \\ \mathbf{f}(N-1) \end{bmatrix},$$

o, si integramos  $\mathbf{D}_0$  y  $\mathbf{H}_0$  en  $\mathbf{W}_0$ ,

$$\begin{bmatrix} g_0(0) \\ g_0(1) \\ \vdots \\ g_0(N/2-2) \\ g_0(N/2-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}(0) \\ \mathbf{f}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(N-2) \\ \mathbf{f}(N-1) \end{bmatrix}.$$

Como hemos dicho en la sección 2.3.1, la matriz  $\mathbf{H}_{l_1, l_2}$ , que representa el modo en que un conjunto de píxeles de alta resolución afecta a cada píxel de baja resolución, puede tener diferentes formas. Otra posible matriz de integración sería la siguiente:

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

en cuyo caso, la matriz  $\mathbf{W}_1$  tendría ahora la forma

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Podemos ver que ni  $\mathbf{W}_0$  ni  $\mathbf{W}_1$  son matrices circulantes, por lo que no podemos utilizar la DFT para realizar implementaciones rápidas de las operaciones en el dominio de las frecuencias. Sin embargo, al igual que en la sección B.2, podemos reordenar los coeficientes de estas matrices. Si reescribimos la ecuación (B.31) como

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{l_1, l_2} &= \mathbf{W}_{l_1, l_2} \mathbf{D}^t \mathbf{D} \mathbf{f} \\ &= \mathbf{W}_{l_1, l_2}^D \mathbf{f}^D, \end{aligned} \tag{B.33}$$

donde  $\mathbf{W}_{l_1, l_2}^D$  es una matriz que contiene las columnas de  $\mathbf{W}_{l_1, l_2}$  reordenadas, primero las columnas pares y después las impares, y  $\mathbf{f}^D$  es un vector columna con los elementos de  $\mathbf{f}$

también reordenados, primero los términos de índice par y después los de índice impar. Veamos la estructura que tienen  $\mathbf{W}_0^D$  y  $\mathbf{W}_1^D$ , los dos ejemplos que hemos mostrado anteriormente:

$$\mathbf{W}_0^D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_1^D = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Aunque estas matrices tampoco son circulantes, sí son matrices BC  $(2, N/2)$ , lo que nos va a permitir, tal como hemos visto en el apéndice A, realizar implementaciones rápidas de todas estas operaciones en el dominio frecuencial, gracias a la diagonalización por bloques que podemos realizar mediante la aplicación de la DFT.

En el caso bidimensional es posible comprobar que la formulación del problema involucra matrices por bloques circulantes de nivel 2 (BC2), que, como hemos visto en el apéndice B, también son diagonalizables mediante la DFT bidimensional, lo que nos permitirá realizar todas las operaciones en el dominio frecuencial mediante implementaciones rápidas.



# Bibliografía

- [1] Abad, J., Mateos, J., Molina, R. y Cortijo, F. J., “A Study of Methods for Choosing the Unknown Parameters in the Bayesian and Regularization Approaches to Image Restoration”, en *Proceedings of the VI Spanish Symposium on Pattern Recognition and Image Analysis*, A. Calvo y R. Medina, eds., págs. 358–365, Córdoba, España, 1995.
- [2] Aizawa, K., Komatsu, T. y Saito, T., “A scheme for acquiring very high resolution images using multiple cameras”, en *IEEE Conference on Audio, Speech and Signal Processing*, vol. 3, págs. 289–292, 1992.
- [3] Anderson, G. y Netravali, A., “Image Restoration Based on a Subjective Criterion”, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. CMS-6, págs. 845–853, 1976.
- [4] Antonini, M., Barlaud, M., Mathieu, P. y Daubechies, I., “Image Coding Using Wavelet Transform”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 1, nº 2, págs. 205–220, 1992.
- [5] Baker, S. y Kanade, T., “Limits on Super-Resolution and How to Break Them”, en *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, vol. 2, págs. 372–379, 2000.
- [6] Baker, S. y Kanade, T., “Super-Resolution: Reconstruction or Recognition?”, en *IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, 2001.

- 
- [7] Banham, M. R., y Katsaggelos, A. K., “Digital Image Restoration”, *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 14, n<sup>o</sup> 2, págs. 24–41, 1997.
- [8] Banham, M. R., *Wavelet-Based Image Restoration Techniques*, Tesis Doctoral, Northwestern University, Evanston (Illinois), USA, 1994.
- [9] Banham, M. R., Brailean, J. C., Chan, C. L. y Katsaggelos, A. K., “Low Bit Rate Video Coding Using Robust Motion Vector Regeneration in the Decoder”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 3, n<sup>o</sup> 5, págs. 652–665, 1994.
- [10] Banham, M. R., Galatsanos, N. P., Gonzalez, H. L. y Katsaggelos, A. K., “Multichannel restoration of single channel images using a wavelet-based subband decomposition”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 3, págs. 821–833, 1994.
- [11] Banham, M. R., Gonzalez, H., Galatsanos, N. P. y Katsaggelos, A. K., “Multi-channel Restoration of Single Channel Images Using a Wavelet Decomposition”, en *Proc. of the 1993 International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'93)*, págs. 255–251, Minneapolis (Minnesota), 1993.
- [12] Banham, M. R. y Katsaggelos, A. K., “Spatially Adaptive Wavelet-Based Multi-scale Image Restoration”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 5, n<sup>o</sup> 4, págs. 619–634, 1996.
- [13] Belge, M., Kilmer, M. y Miller, E. L., “Simultaneous Multiple Regularization Parameter Selection by Means of the L-hypersurface with Applications to Linear Inverse Problems Posed in the Wavelet Transform Domain”, en *SPIE Conference on Bayesian Inference for Inverse Problems, SPIE vol. 3459*, págs. 328–336, San Diego (California), 1998.
- [14] Belge, M., Kilmer, M. E. y Miller, E. L., “Wavelet Domain Image Restoration with Adaptive Edge-Preserving Regularization”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 9, n<sup>o</sup> 4, págs. 597–608, 2000.

- 
- [15] Belge, M. y Miller, E. L., “Wavelet Domain Bayesian Image Restoration Using Edge Preserving Prior Models”, en *1998 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP'98)*, vol. 2, págs. 103–107, Chicago (Illinois), 1998.
- [16] Berger, J. O., *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, Springer-Verlag, 1988.
- [17] Berger, T., Strömberg, J. O. y Eltoft, T., “Adaptive Regularized Constrained Least Squares Image Restoration”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 8, nº 9, págs. 1191–1203, 1999.
- [18] Blake, A. y Zisserman, A., *Visual reconstruction*, The MIT Series in Artificial Intelligence, The MIT Press, 1987.
- [19] Borman, S. y Stevenson, R., “Spatial Resolution Enhancement of Low-Resolution Image Sequences. A Comprehensive Review with Directions for Future Research”, Tech. Rep., Laboratory for Image and Signal Analysis, University of Notre Dame, Indiana (USA), 1998.
- [20] Bose, N. K. y Boo, K. J., “High-Resolution Image Reconstruction with Multisensors”, *International Journal of Imaging Systems and Technology*, vol. 9, págs. 141–163, 1998.
- [21] Bose, N. K., Lertrattanapanich, S. y Koo, J., “Advances in superresolution using L-curve”, *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, vol. 2, págs. 433–436, 2001.
- [22] Bouman, C. y Sauer, K., “A Generalized Gaussian Image Model for Edge-Preserving MAP Estimation”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 2, nº 3, págs. 296–310, 1993.
- [23] Bruneau, J. M. y Mathieu, P., “Image Restoration Using Biorthogonal Wavelet Transform”, *Optical Engineering*, vol. 33, nº 7, págs. 2378–2384, 1994.

- [24] Buccigrossi, R. W. y Simoncelli, E. P., “Image Compression via Joint Statistical Characterization in the Wavelet Domain”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 8, n<sup>o</sup> 12, págs. 1688–1701, 1999.
- [25] Buntine, W., *A Theory of Learning Classification Rules*, Tesis Doctoral, University of Technology, Sidney, Australia, 1991.
- [26] Buntine, W., “Theory Refinement on Bayesian Networks”, en *Seventh Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, págs. 52–60, 1991.
- [27] Buntine, W. y Weigund, A., “Bayesian Back-Propagation”, *Complex Systems*, vol. 5, págs. 603–643, 1991.
- [28] Buonanno, R., Buscema, G., Corsi, C. E., Ferraro, I. y Iannicola, G., “Automated Photographic Photometry of Stars in Globular Clusters”, *Astronomy and Astrophysics*, vol. 126, págs. 278–282, 1983.
- [29] Burns, T., Rogers, S., Ruck, D. y Oxley, M., “Discrete, Spatiotemporal, Wavelet Multiresolution Analysis Method for Computing Optical Flow”, *Optical Engineering*, vol. 33, n<sup>o</sup> 7, págs. 2236–2247, 1994.
- [30] Capel, D. P. y Zisserman, A., “Super-Resolution From Multiple Views Using Learnt Image Models”, en *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, vol. 2, págs. 627–634, 2001.
- [31] Chan, R. H., Chan, T. F., Ng, M. K., Tang, W. C. y Wong, C. K., “Preconditioned Iterative Methods for High-resolution Image Reconstruction with Multi-sensors”, en *Proceedings to the SPIE Symposium on Advanced Signal Processing: Algorithms, Architectures, and Implementations*, vol. 3461, págs. 348–357, 1998.
- [32] Chan, R. H., Chan, T. F., Shen, L. y Zuowei, S., “A Wavelet Method for High-Resolution Image Reconstruction with Displacement Errors”, en *Proceedings of the International Symposium on Intelligent Multimedia, Video and Speech Processing*, págs. 24–27, 2001.

- [33] Chan, R. H., Chan, T. F., Shen, L. X. y Shen, Z. W., “Wavelet Algorithms for High-Resolution Image Reconstruction”, Tech. Rep., Department of Mathematics, Chinese University of Hong Kong, 2001.
- [34] Charbonnier, P., Blanc-Féraud, L., Aubert, G. y Barlaud, M., “Deterministic Edge-Preserving Regularization in Computed Imaging”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 6, n<sup>o</sup> 2, págs. 298–311, 1997.
- [35] Chauduri, S. (ed.), *Super-Resolution Imaging*, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [36] Chellappa, R., Simchony, T. y Lichtenstein, Z., “Image Estimation Using 2-D Gauss-Markov Random Field Models”, en *Digital Image Restoration*, A. K. Katsaggelos, ed., págs. 109–141, Springer-Verlag, 1991.
- [37] Chou, C. K., *A Stochastic Modeling Approach to Multiscale Signal Processing*, Tesis Doctoral, Massachusetts Institute of Technology, Department of Computer Science and Electrical Engineering, 1991.
- [38] Chui, C. K., *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, 1992.
- [39] Cooper, G. y Herkovsits, E., “A Bayesian Method for the Induction of Probabilistic Networks from Data”, *Machine Learning*, vol. 9, págs. 309–347, 1992.
- [40] Cortijo, F., Villena, S., Molina, R. y Katsaggelos, A., “Bayesian Superresolution of Text Image Sequences from Low-Resolution Observations”, en *Seventh International Symposium on Signal Processing and Its Applications (ISSPA 2003)*, vol. 1, págs. 421–424, París (Francia), 2003.
- [41] Daubechies, I., “Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 41, págs. 909–996, 1988.
- [42] Daubechies, I., *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, 1992.
- [43] Delaney, A. H. y Bresler, Y., “Multiresolution Tomographic Reconstruction Using Wavelets”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 4, n<sup>o</sup> 6, págs. 799–813, 1995.

- [44] Dempster, A. P., Laird, N. M. y Rubin, D. B., “Maximum Likelihood from Incomplete Data”, *Journal of the Royal Statistics Society B*, vol. 39, págs. 1–38, 1972.
- [45] Dudgeon, D. E. y Mersereau, R. M., *Multidimensional Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1984.
- [46] Elad, M. y Hel-Or, Y., “A Fast Super-Resolution Reconstruction Algorithm for Pure Translational Motion and Common Space Invariant Blur”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 10, págs. 1187–93, 2001.
- [47] Freeman, W. T., Pasztor, E. C. y Carmichael, O. T., “Learning Low-level Vision”, *International Journal of Computer Vision*, vol. 40, págs. 25–47, 2000.
- [48] Frutcher, A. S. y Hook, R.Ñ., “Drizzle: a method for the linear reconstruction of undersampled images”, *Publication of the Astronomical Society of the Pacific*, vol. 114, págs. 144–152, 2002.
- [49] Galatsanos, N., Mesarovic, V., Molina, R. y Katsaggelos, A. K., “Hierarchical Bayesian Image Restoration for Partially-Known Blurs”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 9, n<sup>o</sup> 10, págs. 1784–1797, 2000.
- [50] Galatsanos, N. P. y Chin, R. T., “Digital Restoration of Multichannel Images”, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 37, n<sup>o</sup> 3, págs. 415–421, 1989.
- [51] Galatsanos, N. P. y Katsaggelos, A. K., “Methods for Choosing the Regularization Parameter and Estimating the Noise Variance in Image Restoration and Their Relation”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 1, págs. 322–336, 1992.
- [52] Galatsanos, N. P., Katsaggelos, A. K., Chin, R. T. y Hillery, A. D., “Least Squares Restoration of Multichannel Images”, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 39, n<sup>o</sup> 10, págs. 2222–2236, 1991.

- [53] Galatsanos, N. P., Mesarovic, V. Z., Molina, R., Katsaggelos, A. K. y Mateos, J., “Hyperparameter Estimation in Image Restoration problems with Partially-Known Blurs”, *Optical Engineering*, vol. 41, págs. 1845–1854, 2002.
- [54] Geman, D. y Yang, C., “Nonlinear Image Recovery with Half-Quadratic Regularization”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 4, n<sup>o</sup> 7, págs. 932–946, 1995.
- [55] Geman, S. y Geman, D., “Stochastic Relaxation, Gibbs Distribution, and the Bayesian Restoration of Images”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 6, n<sup>o</sup> 6, págs. 721–741, 1984.
- [56] Gonzalez, R. C. y Woods, R. E., *Digital Image Processing*, Addison-Wesley, 1992.
- [57] Gull, S., “Developments in Maximum Entropy Data Analysis”, en *Maximum Entropy and Bayesian Methods*, J. Skilling, ed., págs. 53–71, Kluwer, 1989.
- [58] Hanisch, R. J. y White, R. L. (eds.), *Image Restoration Workshop: The Restoration of HST Images and Spectra II*, The Space Telescope Science Institute, Baltimore (Maryland), 1993.
- [59] Hook, R., “An Overview of Some Image Restoration and Combination Methods”, *ST-ECF Newsletter*, vol. 26, págs. 3–5, 1999.
- [60] Jain, A. K., *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice Hall, 1989.
- [61] Jeng, F. C. y Woods, J., “Compound Gauss-Markov Models for Image Processing”, en *Digital Image Restoration*, A. K. Katsaggelos, ed., págs. 89–108, Springer-Verlag, 1991.
- [62] Kang, M. G. y Katsaggelos, A. K., “Simultaneous Iterative Image Restoration and Evaluation of the Regularization Parameters”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, n<sup>o</sup> 9, págs. 2329–2334, 1992.

- [63] Kang, M. G. y Katsaggelos, A. K., “General Choice of the Regularization Functional in Regularized Image Restoration”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 4, n<sup>o</sup> 5, págs. 594–602, 1995.
- [64] Katsaggelos, A. K. (ed.), *Digital Image Restoration*, Springer-Verlag, 1991.
- [65] Katsaggelos, A. K., Biemond, J., Mersereau, R. M. y Schafer, R. W., “Nonstationary Iterative Image Restoration”, en *Proceedings of the IEEE 1985 International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, págs. 696–699, 1985.
- [66] Katsaggelos, A. K., Biemond, J., Schafer, R. W. y Mersereau, R. M., “A Regularized Iterative Image Restoration Algorithm”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, n<sup>o</sup> 4, págs. 914–929, 1991.
- [67] Katsaggelos, A. K. y Kang, M. G., “Iterative Evaluation of the Regularization Parameter in Regularized Image Restoration”, *Journal of Visual Communication and Image Representation*, vol. 3, págs. 446–455, 1992.
- [68] Katsaggelos, A. K. y Kang, M. G., “A Spatially Adaptive Iterative Algorithm for the Restoration of Astronomical Images”, *International Journal of Imaging Systems and Technology. Special Issue: Image Reconstruction and Restoration in Astronomy*, vol. 6, n<sup>o</sup> 4, págs. 305–313, 1995.
- [69] Katsaggelos, A. K. y Lay, K. T., “Maximum Likelihood Blur Identification and Image Restoration Using the EM Algorithm”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, n<sup>o</sup> 3, págs. 729–733, 1991.
- [70] Katsaggelos, A. K., Lay, K. T. y Galatsanos, N. P., “A General Framework for Frequency Domain Multi-Channel Signal Processing”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 2, n<sup>o</sup> 3, págs. 417–420, 1993.
- [71] Kolaczyk, E. D., “A Wavelet Shrinkage Approach to Tomographic Image Reconstruction”, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 91, págs. 1079–1090, 1996.

- [72] Kovacevic, J. y Daubechies, I. (eds.), *Proceedings of the IEEE. Special Issue on Wavelets*, vol. 84, n<sup>o</sup> 4, 1996.
- [73] Krist, J. y Hook, R., *The Tiny TIM User's Guide, Version 6.0*, The Space Telescope Science Institute, July, 2001, <http://www.stsci.edu/software/tinytim>.
- [74] Lagendijk, R. L. y Biemond, J., *Iterative Identification and Restoration of Images*, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [75] Lay, K. T., *Maximum Likelihood Iterative Image Identification and Restoration*, Tesis Doctoral, Northwestern University, Evanston (Illinois), 1991.
- [76] Links, J. M., Prince, J. L. y Gupta, S. N., "A vector Wiener filter for dual-radionuclide imaging", *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 15, n<sup>o</sup> 5, págs. 700–709, 1996.
- [77] Liu, J. y Moulin, P., "Statistical Image Restoration Based on Adaptive Wavelet Models", en *Proceedings of the 2001 International Conference on Image Processing*, págs. 21–24, 2001.
- [78] López, A., *Reconstrucción bayesiana de imágenes SPECT usando modelos de Gauss-Markov. Estimación de parámetros*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 2002.
- [79] López, A., Molina, R. y Katsaggelos, A., "Bayesian SPECT Image Reconstruction with Scale Hyperparameter Estimation for Scalable Priors", en *1st Iberian Conference on Pattern Recognition and Image Analysis (IbPRIA2003)*, vol. 2652 de *Lecture Notes in Computer Science*, págs. 445–452, Springer-Verlag, June 2003.
- [80] López, A., Molina, R., Katsaggelos, A. K. y Mateos, J., "SPECT Image Reconstruction Using compound Models", *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, vol. 16, n<sup>o</sup> 3, págs. 317–330, 2002.

- [81] López, A., Vega, M., Molina, R., Katsaggelos, A. K., Rodríguez, A., López, J. y Llamas, J. M., “Bayesian Reconstruction of SPECT Images: An Aid in Nuclear Medicine Diagnosis”, *Enviado a IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2001.
- [82] Lucy, L. B., “An Iterative Technique for the Rectification of Observed Distributions”, *Astronomical Journal*, vol. 79, págs. 745–754, 1974.
- [83] Luetthgen, M., Karl, W. C. y Willsky, A., “Efficient multiscale regularization with applications to the computation of optical flow”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 3, n<sup>o</sup> 1, págs. 41–64, 1994.
- [84] MacKay, D. J. C., “Bayesian Interpolation”, *Neural Computation*, vol. 4, págs. 415–447, 1992.
- [85] MacKay, D. J. C., “A Practical Bayesian Framework for Backprop Networks”, *Neural Computation*, vol. 4, págs. 448–472, 1992.
- [86] Mallat, S. G. y Hwang, W. L., “Singularity Detection and Processing with Wavelets”, Tech. Rep., Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, Marzo 1991.
- [87] Mallat, S. G. y Zhong, S., “Characterization of Signals From Multiscale Edges”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 14, n<sup>o</sup> 7, págs. 710–732, 1992.
- [88] Mateos, J., *Reconstrucción automática de imágenes comprimidas mediante transformada coseno discreta usando métodos bayesianos*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 1998.
- [89] Mateos, J., Katsaggelos, A. K. y Molina, R., “A Bayesian Approach for the Estimation and Transmission of Regularization Parameters for Reducing Blocking Artifacts”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 9, n<sup>o</sup> 7, págs. 1200–1215, 2000.

- [90] Mateos, J., Katsaggelos, A. K. y Molina, R., “Color Image Restoration Using Compound Gauss-Markov Random Fields”, en *X European Signal Processing Conference (EUSIPCO'2000)*, vol. III, págs. 1341–1344, Tampere, Finlandia, 2000.
- [91] Mateos, J., Vega, M., Molina, R. y Katsaggelos, A., “Bayesian Image Estimation From an Incomplete Set of Blurred, Undersampled Low Resolution Images”, en *1st Iberian Conference on Pattern Recognition and Image Analysis (IbPRIA2003)*, vol. 2652 de *Lecture Notes in Computer Science*, págs. 538–546, Springer-Verlag, June 2003.
- [92] Meyer, Y., *Wavelets: Algorithms and Applications*, SIAM, 1993.
- [93] Molina, R., “On the Hierarchical Bayesian Approach to Image Restoration. Applications to Astronomical Images”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 16, n<sup>o</sup> 11, págs. 1122–1128, 1994.
- [94] Molina, R., del Olmo, A., Perea, J. y Ripley, B. D., “Bayesian Deconvolution in Optical Astronomy”, *Astronomical Journal*, vol. 103, n<sup>o</sup> 2, págs. 666–675, 1992.
- [95] Molina, R., Katsaggelos, A. y Abad, J., “Bayesian Image Restoration Using Wavelet-Based Subband Decomposition”, en *1999 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP99)*, vol. VI, págs. 3257–3260, 1999.
- [96] Molina, R., Katsaggelos, A. K. y Mateos, J., “Bayesian and Regularization Methods for Hyperparameter Estimation in Image Restoration”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 8, n<sup>o</sup> 2, págs. 231–246, 1999.
- [97] Molina, R., Katsaggelos, A. K. y Mateos, J., “Bayesian and Regularization Methods for Hyperparameter Estimation in Image Restoration”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 8, págs. 231–246, 1999.
- [98] Molina, R., Katsaggelos, A. K., Mateos, J. y Abad, J., “Compound Gauss-Markov Random Fields for Astronomical Image Restoration”, *Vistas in Astronomy. Spe-*

- cial Issue on Vision Modelling and Information Coding*, vol. 40, n<sup>o</sup> 4, págs. 539–546, 1996.
- [99] Molina, R., Katsaggelos, A. K., Mateos, J. y Abad, J., “Restoration of Severely Blurred High Range Images using Compound Models”, en *Proceedings 1996 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP’96)*, vol. II, págs. 469–472, Lausana, Suiza, 1996.
- [100] Molina, R., Katsaggelos, A. K., Mateos, J., Abad, J. y Cortijo, F. J., “Restauración de Imágenes Digitales”, *Novática. Monografía: Inteligencia Artificial*, vol. 131, págs. 24–28, 1998.
- [101] Molina, R., Katsaggelos, A. K., Mateos, J., Hermoso, A. y Segall, A., “Restoration of Severely Blurred High Range Images Using Stochastic and Deterministic Relaxation Algorithms in Compound Gauss Markov Random Fields.”, *Pattern Recognition*, vol. 33, n<sup>o</sup> 4, págs. 555–571, 2000.
- [102] Molina, R., Mateos, J. y Abad, J., “Prior Models and the Richardson-Lucy Restoration Method”, en *Image Restoration Workshop: The Restoration of HST Images and Spectra II*, R. J. Hanisch y R. L. White, eds., págs. 118–122, The Space Telescope Science Institute, Baltimore (Maryland), 1993.
- [103] Molina, R., Mateos, J., Abad, J., Pérez de la Blanca, N., Molina, A. y Moreno, F., “Bayesian Image Restoration in Astronomy: Application to Images of the Recent Collision of Comet Shoemaker-Levy 9 with Jupiter”, *International Journal of Imaging Systems and Technology. Special Issue: Image Reconstruction and Restoration in Astronomy*, vol. 6, n<sup>o</sup> 4, págs. 370–375, 1995.
- [104] Molina, R., Mateos, J. y Katsaggelos, A. K., “Multichannel Image Restoration Using Compound Gauss-Markov Random Fields”, en *2000 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP’2000)*, vol. I, págs. 141–144, Estambul, Turquía, 2000.

- [105] Molina, R., Mateos, J., Katsaggelos, A. K. y Vega, M., “Bayesian Multichannel Image Restoration Using Compound Gauss-Markov Random Fields”, Aceptado para su publicación en *IEEE Transactions on Image Processing*.
- [106] Molina, R., Núñez, J., Cortijo, F. y Mateos, J., “Image Restoration in Astronomy. A Bayesian review”, *Signal Processing Magazine*, vol. 18, nº 2, págs. 11–29, 2001.
- [107] Molina, R., Pérez de la Blanca, N. y Ripley, B. D., “Statistical Restoration of Astronomical Images”, en *Data Analysis in Astronomy III*, V. D. Gesu, L. Scarsi, P. Crane, J. H. Friedman, S. Levialdi y M. C. Maccarone, eds., págs. 75–82, Plenum Publishing Corp., 1989.
- [108] Molina, R. y Ripley, B. D., “Using Spatial Models as Priors in Astronomical Image Analysis”, *Journal of Applied Statistics*, vol. 16, nº 2, págs. 193–206, 1989.
- [109] Molina, R., Vega, M., Abad, J. y Katsaggelos, A., “Parameter Estimation in Bayesian High-Resolution Image Reconstruction with Multisensors”, Aceptado para su publicación en *IEEE Transactions on Image Processing*.
- [110] Moulin, P. y Liu, J., “Analysis of Multiresolution Image Denoising Schemes Using Generalized Gaussian and Complexity Priors”, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 45, nº 3, págs. 909–919, 1999.
- [111] Netravali, A. N. y Haskell, B. G., *Digital Pictures: Representation, Compression and Standards*, Plenum Press, 2ª ed<sup>ón</sup>., 1995.
- [112] Ng, M. K., Chan, R. H. y Chan, T. F., “Cosine transform preconditioners for high resolution image reconstruction”, *Linear Algebra and its Applications*, vol. 316, págs. 89–104, 2000.
- [113] Ng, M. K. y Yip, A. M., “A Fast MAP algorithm for High-Resolution Image Reconstruction with Multisensors”, *Multidimensional Systems and Signal Processing*, vol. 12, págs. 143–164, 2001.

- [114] Nguyen, N., *Numerical Algorithms for superresolution*, Tesis Doctoral, Stanford University, 2001.
- [115] Nguyen, N. y Milanfar, P., “A Wavelet-Based Interpolation-Restoration Method for Superresolution”, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 19, págs. 321–338, 2000.
- [116] Nguyen, N., Milanfar, P. y Golub, G., “Blind superresolution with generalized cross-validation using Gauss-type quadrature rules”, en *33rd Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, vol. 2, págs. 1257–1261, 1999.
- [117] Nguyen, N., Milanfar, P. y Golub, G., “A Computationally Efficient Superresolution Image Reconstruction Algorithm”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 10, págs. 573–583, 2001.
- [118] Nguyen, N., Milanfar, P. y Golub, G., “Efficient Generalized Cross-Validation with Applications to Parametric Image Restoration and Resolution Enhancement”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 10, págs. 1299–1308, 2001.
- [119] Núñez, J. (ed.), *Image Reconstruction and Restoration in Astronomy. Special Issue of International Journal of Imaging Systems and Technology*, vol. 6, nº 4, 1995.
- [120] Núñez, J. y Otazu, X., “Multiresolution Image Reconstruction Using Wavelets”, *Vistas in Astronomy*, vol. 40, nº 4, págs. 555–562, 1996.
- [121] Núñez, J., Otazu, X., Fors, O., Prades, A., Pala, V. y Arbiol, R., “Image Fusion with Additive Multiresolution Wavelet Decomposition. Applications to Spot+Landsat Images”, *Journal of the Optical Society of America*, vol. 16, págs. 467–474, 1999.
- [122] Ozkan, M. K., Sezan, M. I., Erdem, A. T. y Tekalp, A. M., “Multiframe Wiener Restoration of Image Sequences”, en *Motion Analysis and Image Sequence Processing*, M. I. Sezan y R. L. Lagendijk, eds., cap. 13, págs. 375–409, Kluwer Academic Publishers, 1993.

- [123] Pirzkal, N., Hook, R. N. y Lucy, L. B., “Two Channel Photometric Restoration Algorithm-GIRA”, *ST-ECF Web Newsletter*, vol. 1, 1999, <http://www.stecf.org/newsletter/webnews1/gira/>.
- [124] Portilla, J. y Simoncelli, E., “A Parametric Texture Model Based on Joint Statistics of Complex Wavelet Coefficients”, *International Journal of Computer Vision*, vol. 40, n<sup>o</sup> 1, págs. 49–71, 2000.
- [125] Rajala, S. y Figueiredo, R., “Adaptive Nonlinear Image Restoration by a Modified Kalman Filtering Approach”, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 29, n<sup>o</sup> 5, págs. 1033–1042, 1981.
- [126] Rajan, D. y Chaudhuri, S., “An MRF-Based Approach to Generation of Super-Resolution Images from Blurred Observations”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 16, págs. 5–153, 2002.
- [127] Richardson, W. H., “Bayesian-Based Iterative Method of Image Restoration”, *Journal of the Optical Society of America*, vol. 62, págs. 55–59, 1972.
- [128] Ripley, B. D., *Spatial Statistics*, John Wiley & Sons, 1981.
- [129] Sahiner, B. y Yagle, A. E., “Image Reconstruction From Projections Under Wavelet Constraints”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, págs. 3579–3584, 1993.
- [130] Saquib, S. S., *Edge-Preserving Models and Efficient Algorithms for Ill-Posed Inverse Problems in Image Processing*, Tesis Doctoral, School of Electrical and Computer Engineering, Purdue University, 1997.
- [131] Saquib, S. S., Bouman, C. A. y Sauer, K., “ML Parameter Estimation for Markov Random Fields with Applications to Bayesian Tomography”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 7, n<sup>o</sup> 7, págs. 1029–1044, 1998.

- [132] Schultz, R. R. y Stevenson, R. L., “Stochastic Modeling and Estimation of Multispectral Image Data”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 4, n<sup>o</sup> 8, págs. 1109–1119, 1995.
- [133] Schultz, R. R. y Stevenson, R. L., “Extraction of High Resolution Frames from Video Sequences”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 5, págs. 996–1011, 1996.
- [134] Searle, S. R., *Matrix Algebra Useful for Statistics*, John Wiley & Sons, 1982.
- [135] Segall, C., Molina, R. y Katsaggelos, A., “High-Resolution Images from Low-Resolution Compressed Video”, *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 20, n<sup>o</sup> 3, págs. 37–48, May 2003.
- [136] Simoncelli, E. P., “Statistical Models for Images: Compression, Restoration and Synthesis”, en *Conference Record of the 31st Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, vol. 1, págs. 673–678, 1997.
- [137] Spiegelhalter, D. J. y Lauritzen, S., “Sequential Updating of Conditional Probabilities on Directed Graphical Structures”, *Networks*, vol. 20, págs. 579–605, 1990.
- [138] Starck, J. L. y Bijaoui, A., “Filtering and Deconvolution by the Wavelet Transform”, *Signal Processing*, vol. 35, págs. 195–211, 1994.
- [139] Starck, J. L., Murtagh, F. y Bijaoui, A., “Image Restoration with Denoising Using Multi-Resolution”, en *The Restoration of HST Images and Spectra, II*, R. J. Hanisch y R. L. White, eds., págs. 111–117, The Space Telescope Science Institute, 1993.
- [140] Stark, H. y Oskoui, P., “High-Resolution Image Recovery from Image-Plane Arrays, using Convex Projections”, *Journal of the Optical Society A*, vol. 6, n<sup>o</sup> 11, págs. 1715–1726, 1989.

- [141] Strauss, C., Wolpert, D. y Wolf, D., "Alpha, Evidence and the Entropic Prior", en *Maximum Entropy and Bayesian Methods, Paris*, A. Mohammed-Djafari, ed., págs. 53–71, Kluwer, 1992.
- [142] Tom, B. C., Galatsanos, N. P. y Katsaggelos, A. K., "Reconstruction of a High Resolution Image From Multiple Low Resolution Images", en *Super-Resolution Imaging*, S. Chaudhuri, ed., cap. 4, págs. 73–105, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [143] Tom, B. C. y Katsaggelos, A. K., "Reconstruction of a High-Resolution Image by Simultaneous Registration, Restoration, and Interpolation of Low-Resolution Images", en *IEEE Proc. International Conference on Image Processing*, vol. 2, págs. 539–542, 1995.
- [144] Tom, B. C., Katsaggelos, A. K. y Galatsanos, N. P., "Reconstruction of a High-Resolution Image from Registration and Restoration of Low-Resolution Images", en *IEEE Proc. International Conference on Image Processing*, vol. 3, págs. 553–557, 1994.
- [145] Tom, B. C., Lay, K. T. y Katsaggelos, A. K., "Multi-Channel Image Identification and Restoration Using the Expectation-Maximization Algorithm", *Optical Engineering. Special Issue on Visual Communications and Image Processing*, vol. 35, n<sup>o</sup> 1, págs. 241–254, 1996.
- [146] Tsai, R. Y. y Huang, T. S., "Multiframe Image Restoration and Registration", en *Advances in Computer Vision and Image Processing*, R. Y. Tsai and T. S. Huang, Eds., vol. 1, págs. 317–339, 1984.
- [147] Vaidyanathan, P. P., *Multirate Systems and Filter Banks*, Englewood Cliffs, 1993.
- [148] Vega, M., Mateos, J., Molina, R. y Katsaggelos, A., "Bayesian Parameter Estimation in Image Reconstruction from Subsampled Blurred Observations", en *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Image Processing*, vol. 3, págs. 709–712, 2003.

- 
- [149] Vetterli, M. y Kovacevic, J., *Wavelets and Subband Coding*, Prentice Hall, 1995.
- [150] Wan, Y. y Nowak, R. D., “A Wavelet-based Statistical Model for Image Restoration”, en *Proceedings of the 2001 International Conference on Image Processing*, págs. 598–601, 2001.
- [151] White, R. L. y Allen, R. J. (eds.), *Image Restoration Workshop: The Restoration of HST Images and Spectra*, The Space Telescope Science Institute, Baltimore (Maryland), 1990.
- [152] Wolpert, D., “On the Use of Evidence in Neural Networks”, en *Advances in Neural Information Processing Systems 5, San Mateo, California*, C. Giles, S. Hanson y J. Cowan, eds., págs. 539–546, Morgan Kaufmann, 1993.
- [153] Woods, J. W., “Two-Dimensional Kalman Filtering”, en *Two-Dimensional Digital Signal Processing*, T. S. Huang, ed., págs. 155–205, Springer-Verlag, 1981.
- [154] Woods, J. W. y Kim, J., “Image Identification and Restoration in the Subband Domain”, en *1992 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 3, págs. 297–300, 1992.
- [155] Xu, Y., Weaver, J. B., Healy, D. M. y Lu, J., “Wavelet Transform Domain Filters: A Spatially Selective Noise Filtration Technique”, *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 3, n<sup>o</sup> 6, págs. 747–758, 1994.