
Superresolución y Reconstrucción Bayesiana de Imágenes a Partir de Imágenes de Baja Resolución Rotadas y Desplazadas. Combinación de Modelos



TESIS DOCTORAL

Salvador Villena Morales

Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos
Escuela Técnica de Ingeniería Informática y Telecomunicaciones
Universidad Granada

Noviembre 2011

Superresolución y Reconstrucción Bayesiana de Imágenes a Partir de Imágenes de Baja Resolución Rotadas y Desplazadas. Combinación de Modelos

Memoria que presenta para optar al título de Doctor

Salvador Villena Morales

Dirigida por los Doctores

**Miguel Vega López
Rafael Molina Soriano**

y

Aggelos K. Katsaggelos

**Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos
Escuela Técnica de Ingeniería Informática y
Telecomunicaciones
Universidad Granada**

Noviembre 2011

*A mis Padres,
a M^a Carmen y a mi hijo*

Resumen

En esta tesis se estudia el problema de la obtención de imágenes de alta resolución a partir de conjuntos de imágenes observadas de baja resolución desplazadas y rotadas, desde un enfoque Bayesiano variacional. Al proceso de obtener imágenes de alta resolución a partir de imágenes de baja resolución se le denomina *Superresolución*. La calidad de las imágenes de alta resolución, obtenidas mediante los métodos Bayesianos de superresolución, depende de los valores seleccionados para los parámetros de las distribuciones de probabilidad, de la precisión del registrado y del modelo a priori de la imagen de alta resolución adoptado, de ahí el interés de los métodos, como los propuestos en esta tesis, que aborden la estimación conjunta de los parámetros de las distribuciones y los del movimiento.

La búsqueda de modelos a priori, que se adecuen a las características de la imagen de alta resolución, sigue siendo un problema abierto y en la literatura especializada aparecen muchos modelos. En esta memoria se propone, por un lado, un método de superresolución Bayesiano variacional que utiliza un modelo a priori basado en la norma ℓ_1 sobre los gradientes horizontales y verticales. Por otra parte, también se propone el uso de combinaciones de diversos modelos a priori, que sean capaces de recoger las distintas características que pueden confluir en cada imagen.

El marco teórico Bayesiano Variacional propuesto permite la estimación conjunta de la imagen de alta resolución, los parámetros de las distribuciones de probabilidad y los parámetros del registrado, utilizando combinaciones lineales de modelos a priori de las imágenes de alta resolución. Este marco teórico se ha aplicado a la obtención de métodos de superresolución para combinaciones de modelos a priori sparse, como el modelo TV o el modelo a priori basado en la norma ℓ_1 sobre el gradiente horizontal y vertical, con modelos a priori no sparse como el modelo autorregresivo SAR.

La evaluación de los distintos parámetros, dentro de los métodos propuestos, debe afrontar arduos problemas de inversión de matrices. Para ello, en esta tesis, se propone una aproximación circulante a las inversas de esas matrices. La tesis ha permitido obtener una aplicación software de libre disposición, con la correspondiente documentación, que implementa todos métodos propuestos en la misma.

La memoria titulada **Superresolución y reconstrucción Bayesiana de imágenes a partir de imágenes de baja resolución rotadas y desplazadas: Combinación de modelos**, que presenta D. Salvador Villena Morales para optar al grado de DOCTOR, ha sido realizada en el Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos de la Universidad de Granada bajo la dirección de los Doctores D. Miguel Vega López, D. Rafael Molina Soriano y D. Aggelos K. Katsaggelos.

Granada Noviembre de 2011

El doctorando

Los directores

Salvador Villena Morales

Miguel Vega López

Rafael Molina Soriano

Aggelos K. Katsaggelos

Agradecimientos

En primer lugar quisiera agradecer a mis directores de tesis: Miguel Vega por su innegable entrega y dedicación ofrecida en todo momento, también por sus innumerables sugerencias y comentarios, y por su apoyo y aliento recibido continuamente; a Rafael Molina por el compromiso en la ejecución de esta tesis, así como, por su incansable predisposición para ayudarme y apoyarme y por sus innumerables consejos; a Aggelos K. Katsaggelos por sus consejos y ánimos recibidos. También deseo agradecer a todos los miembros del Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos por su continuos ánimos, apoyo y predisposición para ayudarme. Quisiera agradecer, también, al Departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial, en especial, a Javier Mateos por la ayuda y apoyo recibido y a Javier Abad y a Francisco Cortijo por haber tenido la oportunidad de colaborar con ellos. Por último deseo agradecer a mi familia y amigos por el tiempo que le he podido escatimar para realizar esta memoria.

Índice

Resumen	VII
Agradecimientos	IX
1. Introducción	1
1.1. Superresolución	1
1.2. Estructura de esta Memoria	2
2. Superresolución: Revisión Histórica	5
2.1. Introducción a la Superresolución	5
2.2. Técnicas de SR Basadas en el Movimiento	9
2.3. Modelo de Observación de la Imagen.	10
2.4. Aproximaciones no Bayesianas	11
2.4.1. SR en el dominio de la frecuencia	12
2.4.2. SR basada en la Interpolación	13
2.4.3. SR basada en ejemplos	14
2.4.4. SR basada en la Teoría de Conjuntos Convexos	17
2.5. Aproximación Bayesiana	18
2.5.1. Modelización Bayesiana.	19
2.5.2. Inferencia Bayesiana	20
2.5.3. SR utilizando Máxima Verosimilitud (ML)	21
2.5.4. SR utilizando Máximo a Posteriori (MAP)	22
2.5.5. SR con la Aproximación Variacional	26
2.6. Conclusiones	28
3. SR Bayesiana Variacional para distintos Modelos a Priori	31
3.1. Introducción	31
3.2. Modelización Bayesiana Jerárquica	32
3.2.1. Modelos a Priori para la Imagen de Alta Resolución	32
3.2.1.1. Modelo a Priori SAR	32
3.2.1.2. Modelo a Priori Basado en la Norma ℓ_1	33
3.2.2. Modelo de Degradación	33

3.2.3. Modelo de los Hiperparámetros	35
3.2.4. Modelo Conjunto	36
3.3. Inferencia Bayesiana Variacional	36
3.4. Inferencia Variacional para el Modelo a Priori SAR	37
3.5. Inferencia Variacional usando la Distribución a Priori ℓ_1	39
3.5.1. Estimación de la Imagen de AR	41
3.5.2. Estimación de los Hiperparámetros	42
3.6. Aproximación Circulante	44
3.7. Experimentos	45
3.8. Conclusiones	47
4. Combinación de Modelos a Priori	65
4.1. Introducción	65
4.2. Modelado Bayesiano Jerarquizado	67
4.3. Inferencia Bayesiana Variacional	68
4.3.1. Estimación de la Imagen de Alta Resolución	71
4.3.2. Estimación de los Hiperparámetros	73
4.3.3. Método de Superresolución	74
4.4. Experimentos	75
4.5. Conclusiones	92
5. Superresolución con Estimación del Movimiento	95
5.1. Introducción	95
5.2. Modelización Bayesiana Jerarquizada	96
5.2.1. Modelización de las incertidumbres de los parámetros del movimiento	96
5.3. Inferencia Bayesiana Variacional	97
5.3.1. Estimación de la Imagen de Alta Resolución y los Pa- rámetros del Registrado	99
5.3.2. Estimación de los Hiperparámetros	104
5.3.3. Método de Superresolución con Estimación de Movi- miento	105
5.4. Experimentos	106
5.5. Conclusiones	114
6. Conclusiones y Trabajos Futuros	137
6.1. Conclusiones	137
6.2. Trabajos Futuros	138
A. Métodos de Inversión Aproximada de Matrices	139
A.1. Introducción	139
A.2. Técnicas de Inversión Aproximada de Matrices Ralas	143

A.2.1. Método de Jacobi	143
A.2.2. Aproximación Circulante	144
A.2.3. Método Factorized Sparse Approximate Inverse (FSAI)	144
A.3. Experimentos	147
A.4. Conclusiones	148
B. Software de Superresolución	155
B.1. Introducción	155
B.2. Manual de Usuario	156
B.2.1. Inicio	157
B.2.2. Modo de ejecución	158
B.2.2.1. Modo Simulado	158
B.2.2.2. Modo Real	162
B.3. Archivos Generados en la Ejecución	163
Bibliografía	171

Índice de figuras

1.1.	Combinación de imágenes observadas de una misma escena para realizar SR cuando las observaciones han sido capturadas: (a) por distintas cámaras al mismo tiempo y (b) por una cámara en una secuencia de instantes.	2
2.1.	(a) Un sensor de CCD con 8×8 píxeles; (b) un CCD del mismo tamaño pero con 16×16 píxeles; (c) un segundo CCD desplazado en un múltiplo exacto del tamaño del pixel; (d) Un segundo CCD desplazado en una fracción de pixel que proporciona información complementaria.	8
2.2.	[(a)-(d)] Conjunto de imágenes de BR con desplazamientos a nivel de subpixel; (e) muestreo irregular de la imagen de AR y (f) muestreo regular de la imagen de AR.	9
3.1.	Movimiento entre los retículos de AR tomado de referencia, en negro, y los retículo correspondiente a la imagen k -ésima de AR en rojo. Aproximación bilineal para la celda (u_k, v_k)	34
3.2.	Conjunto de 8 imágenes de 120×120 píxeles seleccionadas para los experimentos.	48
3.3.	Imagen original y las 2 observaciones generadas con factor de magnificación 2 y ruido Gaussiano aditivo de $10db$	55
3.4.	Imagen original y las 5 observaciones generadas con factor de magnificación 2 y ruido Gaussiano aditivo de $15db$	55
3.5.	Imagen original y las 11 observaciones generadas con factor de magnificación 4 y ruido Gaussiano aditivo de $30db$	56
3.6.	Reconstrucción de imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones a partir de las observaciones con nivel de ruido de $10db$. (a) muestra la reconstrucción aplicando la interpolación bilineal bicúbica con $PSNR = 23,03$, (b) muestra la imagen obtenida con algoritmo basado en el modelo SAR con $PSNR = 27,19$, (c) representa la reconstrucción usando el modelo TV con $PSNR = 31,41$ y (d) muestra el resultado de aplicar método basado en la norma ℓ_1 con $PSNR = 32,16$	57

- 3.7. Muestra $|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{true}|$ para las imágenes de AR estimadas $\hat{\mathbf{x}}$ en el experimento con 5 observaciones con nivel de ruido de $10db$ en las observaciones. Dependiendo del algoritmo utilizado para la estimación de $\hat{\mathbf{x}}$ resultan las siguientes imágenes: (a) cuando es aplicada la interpolación bilineal bicúbica, (b) si se usa el método basado en el modelo SAR, (c) el método basado en el modelo TV y (d) el algoritmo basado la norma ℓ_1 58
- 3.8. Reconstrucción de imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones a partir de las observaciones con nivel de ruido de $10db$. (a) muestra la reconstrucción aplicando la interpolación bilineal bicúbica con $PSNR = 16,45$, (b) muestra la imagen obtenida con algoritmo basado en el modelo SAR con $PSNR = 24,87$, (c) representa la reconstrucción usando el modelo TV con $PSNR = 25,80$ y (d) muestra el resultado de aplicar método basado en la norma ℓ_1 con $PSNR = 26,57$. 59
- 3.9. Muestra $|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{true}|$ para las imágenes de AR estimadas $\hat{\mathbf{x}}$ en el experimento con 5 observaciones con nivel de ruido de $10db$ en las observaciones. Dependiendo del algoritmo utilizado para la estimación de $\hat{\mathbf{x}}$ resultan las siguientes imágenes: (a) cuando es aplicada la interpolación bilineal bicúbica, (b) si se usa el método basado en el modelo SAR, (c) el método basado en el modelo TV y (d) el algoritmo basado la norma ℓ_1 60
- 3.10. Reconstrucción de imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones a partir de las observaciones con nivel de ruido de $20db$. (a) muestra la reconstrucción aplicando la interpolación bilineal bicúbica con $PSNR = 25,08$, (b) muestra la imagen obtenida con algoritmo basado en el modelo SAR con $PSNR = 36,36$, (c) representa la reconstrucción usando el modelo TV con $PSNR = 34,39$ y (d) muestra el resultado de aplicar método basado en la norma ℓ_1 con $PSNR = 36,34$. 61
- 3.11. Muestra $|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{true}|$ para las imágenes de AR estimadas $\hat{\mathbf{x}}$ en el experimento con 5 observaciones con nivel de ruido de $20db$ en las observaciones. Dependiendo del algoritmo utilizado para la estimación de $\hat{\mathbf{x}}$ resultan las siguientes imágenes: (a) cuando es aplicada la interpolación bilineal bicúbica, (b) si se usa el método basado en el modelo SAR, (c) el método basado en el modelo TV y (d) el algoritmo basado la norma ℓ_1 62
- 3.12. Evolución media del PSNR en función del número de observaciones de BR generadas partir de la imagen 3.2(c) con factor de magnificación 2 y ruido Gaussiano aditivo de $10db$ 63

- 4.1. Reconstrucciones de la imagen 3.2(a) de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones a partir de las observaciones con nivel de ruido de $20db$. (a) BBC con $PSNR = 23,04$, (b) RSR con $PSNR = 31,81$, (c) ZMT con $PSNR = 23,56$, (d) SAR con $PSNR = 37,42$, (e) TV con $PSNR = 41,01$, (f) norma ℓ_1 con $PSNR = 42,07$, (g) TV-SAR con $PSNR = 41,14$ y (h) norma ℓ_1 -SAR con $PSNR = 42,16$ 85
- 4.2. Muestra $|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{true}|$ para las imágenes de AR 3.2(a) estimadas $\hat{\mathbf{x}}$ en el experimento con 5 observaciones con nivel de ruido de $20db$ en las observaciones. (a) BBC, (b) RSR, (c) ZMT, (d) SAR, (e) TV, (f) norma ℓ_1 , (g) TV-SAR y (h) norma ℓ_1 -SAR. 86
- 4.3. Muestra los valores de (a) λ_2 y (b) λ_3 en el experimento con 5 observaciones para la imagen (1) con $20db$ de ruido. 87
- 4.4. Reconstrucciones de la imagen de AR 3.2(e) obtenidas en el experimento con 5 observaciones a partir de las observaciones con nivel de ruido de $10db$. (a) BBC con $PSNR = 25,33$, (b) RSR con $PSNR = 31,37$, (c) ZMT con $PSNR = 26,82$, (d) SAR con $PSNR = 32,01$, (e) TV con $PSNR = 33,71$, (f) norma ℓ_1 con $PSNR = 33,56$, (g) TV-SAR con $PSNR = 34,01$ y (h) norma ℓ_1 -SAR con $PSNR = 33,92$ 88
- 4.5. Muestra $|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{true}|$ para las imágenes de AR 3.2(e) estimadas $\hat{\mathbf{x}}$ en el experimento con 5 observaciones con nivel de ruido de $10db$ en las observaciones. (a) BBC, (b) RSR, (c) ZMT, (d) SAR, (e) TV, (f) norma ℓ_1 , (g) TV-SAR y (h) norma ℓ_1 -SAR. 89
- 4.6. Muestra los valores de (a) λ_2 y (b) λ_3 en el experimento con 5 observaciones para la imagen (5) con $10db$ de ruido. 90
- 4.7. Reconstrucciones de la imagen de AR 3.2(b) obtenidas en el experimento con 5 observaciones a partir de las observaciones con nivel de ruido de $15db$. (a) BBC con $PSNR = 16,38$, (b) RSR con $PSNR = 30,82$, (c) ZMT con $PSNR = 19,57$, (d) SAR con $PSNR = 30,16$, (e) TV con $PSNR = 33,71$, (f) norma ℓ_1 con $PSNR = 34,27$, (g) TV-SAR con $PSNR = 34,51$ y (h) norma ℓ_1 -SAR con $PSNR = 34,62$ 91
- 4.8. Muestra $|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{true}|$ para las imágenes de AR 3.2(b) estimadas $\hat{\mathbf{x}}$ en el experimento con 5 observaciones con nivel de ruido de $10db$ en las observaciones. (a) BBC, (b) RSR, (c) ZMT, (d) SAR, (e) TV, (f) norma ℓ_1 , (g) TV-SAR y (h) norma ℓ_1 -SAR. 93
- 4.9. Muestra los valores de (a) λ_2 y (b) λ_3 en el experimento con 5 observaciones para la imagen (2) con $10db$ de ruido. 94

5.1. Media de los errores absolutos en el registrado de la imagen mostrada en 3.2(h) para distintos niveles de ruido: (a) desplazamiento horizontal, (b) desplazamiento vertical y (c) ángulo de rotación.	115
5.2. Media de los errores absolutos en el registrado de la imagen mostrada en 3.2(b) para distintos niveles de ruido: (a) desplazamiento horizontal y (b) desplazamiento vertical.	116
5.3. Media de los errores absolutos en el registrado de la imagen mostrada en 3.2(c) para distintos niveles de ruido: (a) desplazamiento horizontal, (b) desplazamiento vertical y (c) ángulo de rotación.	117
5.4. Media de los errores absolutos en el registrado de la imagen mostrada en 3.2(f) para distintos niveles de ruido: (a) desplazamiento horizontal, (b) desplazamiento vertical y (c) ángulo de rotación.	118
5.5. Muestra la calidad de la imagen 3.2(h) reconstruida por los distintos métodos. (a) cuando es conocido el movimiento exacto y (b) cuando éste ha sido estimado.	119
5.6. Muestra la diferencia entre los valores de PSNR de la figura 5.5(a) y los de la figura 5.5(b).	120
5.7. Reconstrucciones de la imagen 3.2(c) de AR obtenidas en el experimento con 5 obsevaciones a partir de las observaciones con nivel de ruido de 20db. (a) BBC con $PSNR = 24,74$, (b) RSR con $PSNR = 26,33$, (c) ZMT con $PSNR = 25,23$, (d) SARREG con $PSNR = 39,00$, (e) TV con $PSNR = 39,46$, (f) ℓ_1 con $PSNR = 39,52$, (g) TV-SAR con $\lambda_3 = 0,75$ y $PSNR = 40,54$ y (h) ℓ_1 -SAR con $\lambda_2 = 0,75$ y $PSNR = 40,59$	121
5.8. Muestra $ \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{true} $ para las imágenes de AR 3.2(c) estimadas $\hat{\mathbf{x}}$ en el experimento con 5 obsevaciones con nivel de ruido de 20db en las observaciones. (a) BBC, (b) RSR, (c) ZMT, (d) SARREG, (e) TV, (f) ℓ_1 , (g) TV-SAR y (h) ℓ_1 -SAR.	122
5.9. PSNR de las reconstrucciones en función de (a) λ_2 y (b) λ_3 en el experimento con 5 obsevaciones para la imagen 3.2(c) con 20db de ruido.	123
5.10. Errores de registrado de las imágenes de una de las series generadas, en el experimento con 5 obsevaciones con 20 dB, para la imagen 3.2(c): (a) error del angulo, (b) Error en desplazamiento horizontal y (c) error del desplazamiento vertical.	124

- 5.11. Reconstrucciones de la imagen 3.2(e) de AR obtenidas en el experimento con 5 obsevaciones a partir de las observaciones con nivel de ruido de 15db. (a) BBC con $PSNR = 25,33$, (b) RSR con $PSNR = 26,25$, (c) ZMT con $PSNR = 26,24$, (d) SARREG con $PSNR = 36,12$, (e) TV con $PSNR = 37,12$, (f) $\ell 1$ con $PSNR = 36,77$, (g) TV-SAR con $\lambda_3 = 0,85$ y $PNSR = 37,37$ y (h) $\ell 1$ -SAR con $\lambda_2 = 0,80$ y $PSNR = 37,28$. 125
- 5.12. Muestra $|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{true}|$ para las imágenes de AR 3.2(e) estimadas $\hat{\mathbf{x}}$ en el experimento con 5 obsevaciones con nivel de ruido de 15db en las observaciones. (a) BBC, (b) RSR, (c) ZMT, (d) SARREG, (e) TV, (f) $\ell 1$, (g) TV-SAR y (h) $\ell 1$ -SAR. 126
- 5.13. PSNR de las reconstrucciones en función de (a) λ_2 y (b) λ_3 en el experimento con 5 obsevaciones para la imagen 3.2(e) con 15db de ruido. 127
- 5.14. Errores de registro de las imágenes de una de las series generadas, en el experimento con 5 obsevaciones con 15 dB, para la imagen 3.2(e): (a) error del ángulo, (b) Error en desplazamiento horizontal y (c) error del desplazamiento vertical. . . . 128
- 5.15. Reconstrucciones de la imagen 3.2(h) de AR obtenidas en el experimento con 5 obsevaciones a partir de las observaciones con nivel de ruido de 25db. (a) BBC con $PSNR = 25,08$, (b) RSR con $PSNR = 24,92$, (c) ZMT con $PSNR = 25,08$, (d) SARREG con $PSNR = 40,27$, (e) TV con $PSNR = 41,92$, (f) $\ell 1$ con $PSNR = 42,49$, (g) TV-SAR con $\lambda_3 = 0,85$ y $PNSR = 42,05$ y (h) $\ell 1$ -SAR con $\lambda_2 = 0,95$ y $PSNR = 42,54$. 129
- 5.16. Muestra $|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{true}|$ para las imágenes de AR 3.2(h) estimadas $\hat{\mathbf{x}}$ en el experimento con 5 obsevaciones con nivel de ruido de 25db en las observaciones. (a) BBC, (b) RSR, (c) ZMT, (d) SARREG, (e) TV, (f) $\ell 1$, (g) TV-SAR y (h) $\ell 1$ -SAR. 130
- 5.17. PSNR de las reconstrucciones en función de (a) λ_2 y (b) λ_3 en el experimento con 5 obsevaciones para la imagen 3.2(h) con 25db de ruido. 131
- 5.18. Errores de registro de las imágenes de una de las series generadas, en el experimento con 5 obsevaciones con 25 dB, para la imagen 3.2(h): (a) error del ángulo, (b) Error en desplazamiento horizontal y (c) error del desplazamiento vertical. . . . 132
- 5.19. Reconstrucciones de imágenes de AR obtenidas en el experimento (B) a partir de 20 imágenes reales de la secuencia *text* con los métodos: (a) BBC, (b) RSR, (c) ZMT, (d) $\ell 1$, (e) TV-SAR con $\lambda_3 = 0,6$ y (f) $\ell 1$ -SAR con $\lambda_2 = 0,6$ 133

5.20. Reconstrucciones de imágenes de AR obtenidas en el experimento (B) a partir de 20 imágenes reales de la secuencia <i>adyoron_rotation</i> con los métodos: (a) BBC, (b) RSR, (c) ZMT, (d) ℓ_1 , (e) TV-SAR con $\lambda_3 = 0,6$ y (f) ℓ_1 -SAR con $\lambda_2 = 0,8$	134
5.21. Muestra la secuencia de 19 observaciones de BR obtenidas con una cámara Canon Ixus700.	135
5.22. Reconstrucciones de imágenes de AR obtenidas a partir de 19 observaciones reales capturadas con una cámara Canon Ixus700 (ver figura 5.21) y usando los métodos: (a) BBC, (b) RSR, (c) ZMT, (d) ℓ_1 , (e) TV-SAR con $\lambda_3 = 0,5$ y (f) ℓ_1 -SAR con $\lambda_2 = 0,5$	136
A.1. Patrones de la matriz $\text{cov}[\mathbf{x}]^{-1}$ para las imágenes de la Figura A.3, en el método de SR del capítulo 3, aplicado a conjuntos de cinco observaciones de BR con un factor de escala $\sqrt{P} = 2$, donde (a) corresponde a la imagen de la Figura A.3(a) y (b) a la de la Figura A.3(b) para ángulos de giro en el intervalo $[-5^\circ, 5^\circ]$	141
A.2. Patrones de la matriz $\text{cov}[\mathbf{x}]^{-1}$ para las imágenes de la Figura A.3, en el método de SR del capítulo 3, aplicado a conjuntos de cinco observaciones de BR con un factor de escala $\sqrt{P} = 2$, donde (a) corresponde a la imagen de la Figura (a) corresponde a la imagen de la Figura A.3(a) y (b) a la Figura A.3(b) para ángulos de giro en el intervalo $[-20^\circ, 20^\circ]$	142
A.3. Imágenes de AR utilizadas para la generación de la matriz de covarianza. (a) imagen de 72×72 y (b) imagen de 24×24	143
A.4. Serie de imágenes de AR utilizadas para simular la serie de imágenes obtenidas mediante SR con tamaños 102×102 , 72×72 , 54×54 , 36×36 y 24×24	147
A.5. Estimación de las trazas para los posibles valores de $\mathbf{Q}$ necesarias para la reconstrucción de la imagen de AR $\mathbf{x}$ usando la combinación de modelo a priori SAR y la norma ℓ_1 del gradiente horizontal y vertical, con $\lambda = 0,85$. (a) para $\mathbf{Q} = \Delta_h^t \Delta_h$ y (b) para $\mathbf{Q} = \Delta_v^t \Delta_v$	151
A.6. Estimación de las trazas para los valores de $\mathbf{Q}$ necesarios para estimación de los hiperparámetros usando la combinación de modelo a priori SAR y el modelo basado en la norma ℓ_1 con $\lambda = 0,85$: (a) para $\mathbf{Q} = \mathcal{C}^t \mathcal{C}$ y (b) para $\mathbf{Q} = \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)^t \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)$	152
A.7. Comparación del tiempo de CPU requerido por cada preconditionante para obtener la matriz inversa aproximada de $\text{cov}[\mathbf{x}]^{-1}$	153

B.1. Interfaz gráfica de la aplicación. Los números desde el 1 hasta 7 sobre círculos rojos indican las áreas de interacción de la interfaz.	158
B.2. Apariencia de la Interfaz gráfica cuando se activa el área Mode .	159
B.3. Apariencia de la Interfaz gráfica cuando se activa el área Mode a Simulated . Observe como el botón Open aparece activo.	160
B.4. Apariencia de la Interfaz gráfica cuando se pulsa el botón Open .	161
B.5. Apariencia de la Interfaz gráfica cuando se ha seleccionado la imagen de AR de partida.	162
B.6. Selección del nucleo de emborronamiento.	163
B.7. Matriz que definir el núcleo de emborronamiento en modo Customized	164
B.8. Modos de definir los parámetros de movimiento.	164
B.9. Generación de las observaciones.	165
B.10. Métodos de SR disponibles.	165
B.11. Ejecutando método de SR.	166
B.12. Ejecución de método de SR completado.	166
B.13. Muestra la reconstrucción mejor.	167
B.14. Parámetros almacenados en la estructura llamada <i>outopt</i> al guardar la imagen de AR estimada con el algoritmo 3.2. . . .	167
B.15. Valor del coeficiente de mezcla de modelos a priori cuando se selecciona el método 5.1 o 5.2.	168
B.16. Modo Real	168
B.17. Ejecución del algoritmo 5.1 en Modo Real con $\lambda = 0,7$	169
B.18. Terminación de la ejecución del algoritmo 5.1 en Modo Real con $\lambda = 0,7$ en la iteración 19.	169
B.19. Información en el archivo log generada al ejecutar el algoritmo 5.1 en Modo Real con $\lambda = 0,7$ en la iteración 2.	170

Índice de Tablas

3.1. Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 2 observaciones para los niveles de ruido entre 10db y 20db.	49
3.2. Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 2 observaciones para los niveles de ruido entre 25db y 40db.	50
3.3. Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones para los niveles de ruido entre 10db y 20db	51
3.4. Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones para los niveles de ruido entre 25db y 40db	52
3.5. Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 11 observaciones para los niveles de ruido entre 10db y 20db	53
3.6. Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 11 observaciones para los niveles de ruido entre 25db y 40db	54
4.1. Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones para los niveles de ruido entre 10db y 20db	77
4.2. Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones para los niveles de ruido entre 10db y 20db	78
4.3. Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones para los niveles de ruido entre 25db y 40db	79
4.4. Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones para los niveles de ruido entre 25db y 40db	80

4.5. Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 11 observaciones para los niveles de ruido entre 10db y 20db	81
4.6. Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 11 observaciones para los niveles de ruido entre 10db y 20db	82
4.7. Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 11 observaciones para los niveles de ruido entre 25db y 40db	83
4.8. Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 11 observaciones para los niveles de ruido entre 25db y 40db	84
5.1. Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones para los niveles de ruido entre 10db y 20db (imágenes 3.2(a) a 3.2(d)).	110
5.2. Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones para los niveles de ruido entre 10db y 20db (imágenes 3.2(e) a 3.2(h)).	111
5.3. Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones para los niveles de ruido entre 25db y 40db (imágenes 3.2(a) a 3.2(d)).	112
5.4. Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones para los niveles de ruido entre 25db y 40db (imágenes 3.2(e) a 3.2(h)).	113
A.1. Valore estimados para $\text{traza}(\text{cov}[\mathbf{x}]\Delta_h^t\Delta_h)$	149
A.2. Valore estimados para $\text{traza}(\text{cov}[\mathbf{x}]\Delta_v^t\Delta_v)$	149
A.3. Valore estimados para $\text{traza}(\text{cov}[\mathbf{x}]\mathcal{C}^t\mathcal{C})$	149
A.4. Valore estimados para la media de $\text{traza}(\text{cov}[\mathbf{x}]\mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)^t\mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k))$	149
A.5. Tiempo de CPU consumido	150

Lista de algoritmos

3.1. SR utilizando el modelo SAR	38
3.2. SR utilizando la norma ℓ_1	40
4.1. SR usando la combinación de modelos SAR y ℓ_1	74
4.2. SR usando la combinación de modelos SAR y TV	75
5.1. SR y estimación de movimiento usando la combinación de modelos SAR y ℓ_1	106
5.2. SR y estimación de movimiento usando la combinación de modelos SAR y TV	106
A.1. FSAI	145

Capítulo 1

Introducción

1.1. Superresolución

En esta memoria usaremos el término *Superresolución* (SR) para describir el proceso de obtención de una imagen o de una secuencia de imágenes de alta resolución (AR) a partir de un conjunto de imágenes observadas de baja resolución (BR) Katsaggelos et al. (2007). Este proceso también es conocido como *Mejora de Resolución* (MR) en la literatura. Desde el primer trabajo de SR, Tsai y Huang (1984) hasta hoy han aparecido numerosas aportaciones desde múltiples enfoques (véase Kang y Chaudhuri (Eds.) (2003), Borman (2004), Bose et al. (2004), Farsiu et al. (2004), Ng et al. (2006), Katsaggelos et al. (2007), Katsaggelos y Molina (2009) y Milanfar (2010)).

En los últimos años apreciamos un aumento de la actividad en el campo de la SR estudiada desde una perspectiva bayesiana, y han sido muy numerosas las contribuciones de las comunidades de Reconocimiento de Patrones y Visión por Computadora. Se han aplicado técnicas de SR a una amplia diversidad de imágenes como por ejemplo a imágenes astronómicas, imágenes médicas (imágenes de resonancia magnética: *Magnetic Resonance Imaging* (MRI), Malczewski y Stasinski (2008), imágenes *Positron Emission Tomography* (PET), Kennedy et al. (2006) y *Single Photon Emission Computed Tomography* (SPECT), Caramelo et al. (2007), así como a la mejora de la resolución de imágenes de satélite multiespectrales (pansharpening), Vega et al. (2009a).

La SR puede estar basada en el movimiento entre las observaciones o libre de movimiento como en Chaudhuri y Manjunath (2005). El movimiento entre las observaciones puede ser debido a la captura desde distintas posiciones de una misma imagen estática como se muestra en la figura 1.1 (a), o la captura de una secuencia de imágenes (secuencia de vídeo) de una escena dinámica véase la figura 1.1 (b). En el primer caso las distintas imágenes de BR estarán sometidas a desplazamientos globales a nivel de subpixel debido al desplazamiento relativo entre las distintas tomas. En el segundo caso en

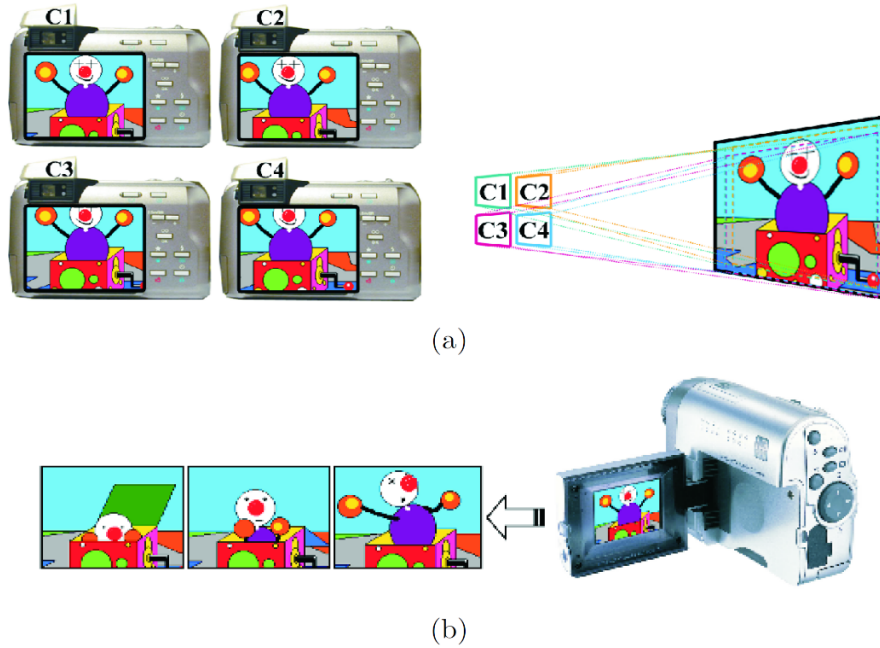


Figura 1.1: Combinación de imágenes observadas de una misma escena para realizar SR cuando las observaciones han sido capturadas: (a) por distintas cámaras al mismo tiempo y (b) por una cámara en una secuencia de instantes.

cambio, los desplazamientos a nivel de subpixel serán locales, como consecuencia del movimiento de los distintos objetos de la escena junto con un posible movimiento global, debido al movimiento de la cámara o al movimiento global del escenario.

En esta memoria nos centraremos en el estudio de la SR espacial de escenas estáticas sujetas a desplazamientos globales como consecuencia de traslaciones y rotaciones en un mismo plano.

1.2. Estructura de esta Memoria

Esta memoria está estructurado en los siguientes capítulos:

- En el capítulo 2 presentamos una revisión bibliográfica del problema objeto de estudio, en la que se prestará más atención a los trabajos realizados desde una perspectiva Bayesiana.
- El capítulo 3 se propone un método de SR Bayesiano variacional usando un modelo a priori basado en la norma ℓ_1 de los gradiente horizontal y vertical, (ver Villena et al. (2009a)).

-
- En el capítulo 4 proponemos la modelización Bayesiana del problema de la SR mediante la combinación de funciones de distribución de probabilidad a posteriori correspondientes a diversos modelos a priori de la imagen de AR (ver Villena et al. (2010a) y Villena et al. (2010c)).
 - El capítulo 5 se aborda la SR con estimación de movimiento para los métodos de SR propuestos en los capítulos anteriores (ver Villena et al. (2010b) y Villena et al. (2011)).
 - Por último, en el capítulo 6 presentamos las conclusiones de esta memoria y los trabajos futuros.
 - En el apéndice A se estudian los métodos de inversión aproximada de matrices ralas propuestas en Villena et al. (2009b).
 - En el apéndice B se describe el software desarrollado para la realización de los experimentos presentados en esta memoria.

Capítulo 2

Superresolución: Revisión Histórica

2.1. Introducción a la Superresolución

Por lo general la mayoría de las aplicaciones que obtienen imágenes o vídeos de AR suelen estar basadas en el análisis y procesamiento posterior de las imágenes adquiridas. La mayor calidad de las imágenes de AR facilita la interpretación humana y ayuda también a su percepción automática. La resolución de la imagen determina el nivel de detalle con el que la imagen ha sido captada, a mayor resolución, mayor será el nivel de detalle de la imagen.

Una imagen digital está compuesta de pequeños elementos pictóricos llamados píxeles. Pueden distinguirse distintos tipos de resolución de una imagen: la *resolución de píxeles* (la cantidad de píxeles por unidad de superficie en una impresión o en una imagen en pantalla), *resolución espacial*, *resolución espectral*, *resolución temporal* y *resolución radiométrica*. En esta tesis estamos interesados principalmente en la resolución espacial, referida al número de píxeles por unidad de superficie de la escena de una imagen.

La resolución espacial de una imagen digital está limitada por el tipo de sensor utilizados en la cámara digital. En la actualidad los sensores de las cámaras suelen ser de tecnología CCD¹ (*charge-coupled device: dispositivo de cargas eléctricas interconectadas*) o de tecnología CMOS² (*complementary metal-oxide-semiconductor: estructuras semiconductor-óxido-metal complementarias*). Ambos sensores están organizados en una matriz bidimensional de sensores fotoeléctricos llamados *fotositos* que capturan la imagen bidimensional. En principio la resolución de las imágenes captadas depende del

¹Willard Boyle y George Smith fueron los inventores el 17 de octubre de 1969 en los Laboratorios Bell, ambos han sido premiados con el Premio Nobel de Física de 2009 precisamente por este invento.

²A principios de los años 60, la tecnología CMOS fue desarrollada por Wanlass y Sah en Fairchild Semiconductor.

número de fotositos del sensor. Un alto número de fotositos posibilita una resolución espacial alta de los sistemas de imagen. Los sensores para capturar la imagen deben muestrear la señal continua que les llega procedente de la escena real. La frecuencia de muestreo determina las componentes de alta frecuencia (detalles de la imagen) que pueden ser captadas. Esto es, a menor resolución del sensor menor será la frecuencia de muestreo y menor será el número de componentes de alta frecuencia que puedan ser captadas. La elección de un sensor con un número bajo de fotositos darían lugar a imágenes de BR en las que se apreciarían efectos de bloque (imágenes pixeladas).

Una forma de aumentar la resolución espacial de las imágenes sería aumentando el número de píxeles a costa de disminuir el tamaño de los fotositos. Sin embargo, la disminución del tamaño de los fotositos conlleva la disminución de la cantidad de luz que incide sobre cada fotosito, causando el conocido ruido de disparo (shot noise) (también conocido como ruido shot). Esto obliga a establecer un equilibrio entre el tamaño del sensor y la calidad de la señal captada. En consecuencia, las limitaciones hardware derivadas del tamaño del sensor restringen la resolución espacial de las imágenes que pueden ser capturadas. Paralelamente, también los detalles de la imagen (componentes de alta frecuencia) están limitados, entre otros factores, por la óptica, debido al emborronamiento de las lentes (asociado con la función de dispersión puntual: *point spread function* (PSF)), el efecto de las aberraciones de las lentes, la difracción de apertura y el emborronamiento debido al movimiento.

La construcción de sistemas de imagen de AR con ópticas de calidad resulta demasiado costosa. Además de las limitaciones por el costo, pueden aparecer limitaciones adicionales propias de su aplicación, como por ejemplo, en el caso de cámaras usadas en vídeo-vigilancia, limitaciones por la velocidad de respuesta y la capacidad de almacenamiento. En el caso de las imágenes de satélite, las restricciones físicas propias del satélite (como peso, condiciones extremas, etc.) limitan el uso ópticas de calidad y de sensores de AR.

Otra forma de abordar este problema es procesando las señales de las imágenes tras su captura sacando partido a su degradación y a costa de invertir en medios computacionales tanto hardware como software. Estas técnicas son, específicamente, conocidas como Superresolución (SR).

Dentro de las técnicas de SR podemos distinguir entre las técnicas de SR basadas en múltiples observaciones desplazadas entre sí, que suelen denominarse como SR basada en el movimiento, y las técnicas de SR libre de movimiento como se propone en Chaudhuri y Manjunath (2005) donde la SR está basada en los cambios del emborronamiento presente en las observaciones o en los cambios de posición de las fuentes lumínicas. En esta memoria nos centraremos en la SR basada en el movimiento.

La SR basada en el movimiento aporta técnicas para reconstruir las imágenes de AR a partir de un conjunto de imágenes observadas de BR, in-

crementando el ancho de banda de la imagen y eliminando la degradación provocada por el proceso de captura de las imágenes observadas de BR. Cada imagen observada de BR es el resultado de submuestrear la escena real y constituye una versión borrosa de la misma. La idea básica de la SR consiste en combinar la información no redundante en las múltiples imágenes observadas de BR, para generar una imagen de AR. La presencia de la información no redundante en las múltiples observaciones de BR se debe a los desplazamientos a nivel de subpixel entre las imágenes captadas.

Para comprenderlo mejor utilizaremos la figura 2.1, en donde (a) y (b) muestra dos sensores de CCD con igual tamaño pero con distinta resolución: (a) de 8×8 y (b) de 16×16 píxeles, que captarían imágenes de BR y de AR respectivamente. Supongamos que usamos dos sensores de BR (esto es, como el mostrado en la figura 2.1(a)) para captar sendas imágenes. Si las imágenes captadas estuvieran desplazadas entre sí en una distancia igual a un múltiplo exacto del tamaño de los píxeles del sensor, los píxeles que aparecerían superpuestos, como se muestra en la figura 2.1(c), aportarían la misma información en ambos sensores. En este caso no sería posible poder hacer SR. Sin embargo en el caso en que el desplazamiento no fuese múltiplo exacto del tamaño de los píxeles del sensor, como se muestra en la figura 2.1(d), los píxeles solapados recogerían información diferente y complementaria.

Los desplazamientos a nivel de subpixel los provocarían los movimientos descontrolados del sistema de captación de imágenes y de la escena, como por ejemplo los movimientos de los objetos y el movimiento orbital, en el caso de las imágenes tomadas desde satélite.

¿Cómo podría abordarse la SR?. Una técnica cercana a la SR es la *interpolación*. Por interpolación se puede obtener una imagen de mayor número de píxeles a partir de una sola imagen. Pero en este caso, no se proporciona información adicional como en el caso de la SR basada en el movimiento. La calidad de la imagen interpolada a partir de una sola imagen está muy limitada por el mal condicionamiento del problema y la pérdida de las componentes de alta frecuencia que no pueden ser recuperadas.

El aliasing no se puede eliminar si disponemos sólo de una imagen de BR. Sin embargo, si disponemos de múltiples observaciones con desplazamientos a nivel de subpixel, cada observación aporta información complementaria. En base al conocimiento exacto del desplazamiento de cada observación, las imágenes observadas pueden ser combinadas para generar una imagen de AR. Si suponemos que la resolución de la imagen de AR es tal que se cumple el criterio de muestreo de Nyquist, entonces la imagen de AR presenta una representación exacta de la escena original (continua).

La figura 2.2 muestra gráficamente en qué consiste el proceso de SR. Supongamos que las observaciones están libres de degradaciones adicionales y que se conocen los desplazamientos exactos a nivel de subpíxeles entre éstas. La cámara captura varias imágenes de BR que son el resultado de

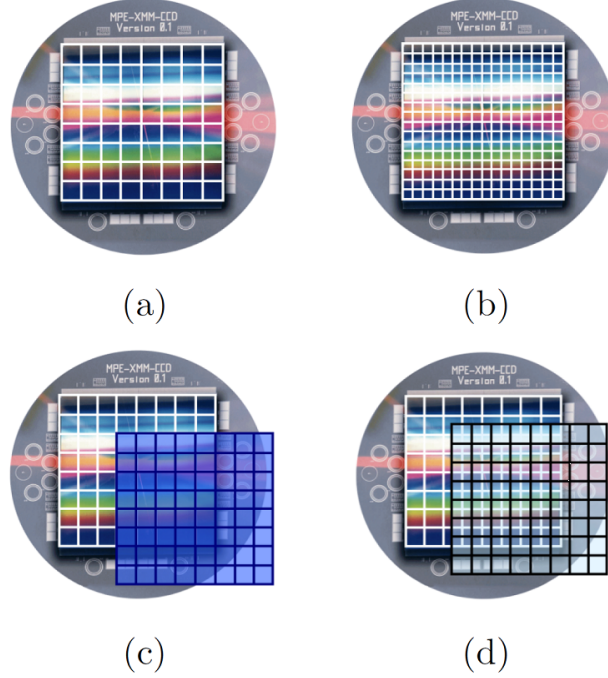


Figura 2.1: (a) Un sensor de CCD con 8×8 píxeles; (b) un CCD del mismo tamaño pero con 16×16 píxeles; (c) un segundo CCD desplazado en un múltiplo exacto del tamaño del pixel; (d) Un segundo CCD desplazado en una fracción de pixel que proporciona información complementaria.

submuestrear la escena de AR y desplazar globalmente cada observación a nivel de subpixel como muestra la figura 2.2(a-d). Mediante interpolación podemos invertir este proceso tras alinear las observaciones de BR a nivel de subpixel y combinarlas en un retículo de AR, para obtener una imagen compuesta de muestras no uniformemente distribuidas sobre el retículo de la imagen de AR (imagen muestreada arbitrariamente), como se muestra en la figura 2.2(e). El problema de la SR consiste en transformar una imagen muestreada arbitrariamente (figura 2.2(e)) en otra imagen muestreada uniformemente (figura 2.2(f)).

La SR tal y como es entendida en esta memoria, ha sido utilizada en muchas áreas de la ciencia e ingeniería como son restauración de imágenes en Astronomía Óptica, Krist (1995), Schultz (1993), Molina et al. (2001), teledetección, Bretschneider et al. (2001), Li et al. (2008), microscopía, Gibson y Lanni (1991), Clement (2004), imágenes médicas, Lopez et al. (2004), Michailovich y Adam (2005), Kennedy et al. (2006), Sarder y Nehorai (2006), Malczewski y Stasinski (2008), Wong (2009) Taxt (2004), óptica, Rogge-

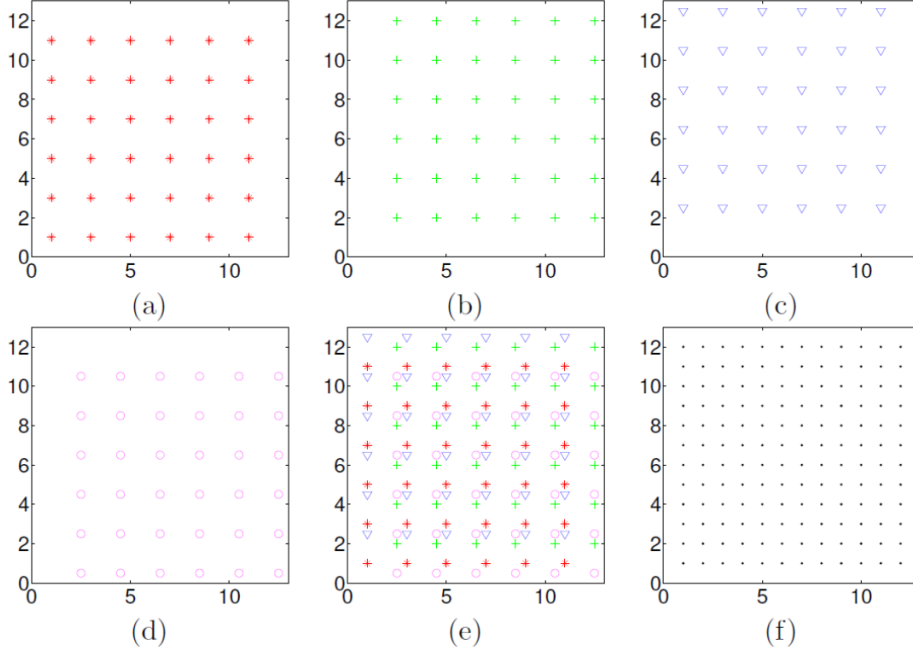


Figura 2.2: [(a)-(d)] Conjunto de imágenes de BR con desplazamientos a nivel de subpixel; (e) muestreo irregular de la imagen de AR y (f) muestreo regular de la imagen de AR.

mann (1991), Nisenson y Barakat (1991), fotografía, Georgiev (2009), vídeo-vigilancia, Cristani et al. (2004), etc..

En este capítulo haremos una revisión histórica de las técnicas de SR basadas en el movimiento partiendo del modelo de observación.

2.2. Técnicas de SR Basadas en el Movimiento

Desde el trabajo seminal de Tsai y Huang (1984) la SR ha sido uno de los campos de investigación más activos en las dos últimas décadas (véase Borman y Stevenson (1998), Park et al. (2003), Milanfar (2010)). La SR ha sido abordada desde el dominio de la frecuencia, el dominio espacial y la perspectiva del procesamiento de señales hasta la del aprendizaje automático.

Los primeros trabajos de SR fueron formulados en el dominio de la frecuencia, en base a la invarianza bajo traslaciones de la transformada de Fourier, siguiendo el modelo propuesto en Tsai y Huang (1984). Este modelo relaciona el aliasing de las imágenes observadas con las componentes de altas frecuencias (detalles) de la imagen de AR a estimar. Desafortunadamente, el planteamiento en el dominio de la frecuencia sólo permite movimientos de

traslación sin rotaciones entre las observaciones, lo que limita su aplicabilidad real. En la actualidad es más frecuente el estudio de la SR en el dominio espacial porque permite una mayor flexibilidad en la adopción de todo tipo de modelos de degradación de la imagen. La SR se plantea como la solución inversa al modelo de observación, que resulta ser un problema mal definido y mal condicionado. Gran parte de los esfuerzos de los métodos de SR se centran en superar la mala definición y condicionamiento con la introducción del término de regularización (distribución a priori en el planteamiento Bayesiano) más adecuado. En las últimas décadas una parte importante de las aportaciones aparecidas en SR adoptan el enfoque estocástico, en concreto Bayesiano, presentándose una amplia variedad de técnicas.

En esta sección haremos una revisión de las técnicas de SR distinguiendo, inicialmente, entre las que adoptan o no, el enfoque Bayesiano.

2.3. Modelo de Observación de la Imagen.

La señal continua procedente de la escena real sufre diferentes tipos de degradaciones hasta convertirse en una imagen digital (en una señal de banda limitada). Básicamente estas degradaciones se deben a las limitaciones hardware de las cámaras digitales y a los fenómenos atmosféricos presentes entre la escena y la lente de la cámara.

Las limitaciones hardware producen diferentes tipos de degradaciones en las imágenes capturadas. Por ejemplo, la apertura del diafragma produce emborronamiento óptico que es modelado mediante la PSF, y los tiempos de apertura prolongados del obturador producen emborronamiento por movimiento. También produce emborronamiento el tamaño de los fotositos, ya que los píxeles de la imagen se obtienen mediante integración sobre el área del fotosito. Todas o gran parte al menos de las degradaciones presentes en las imágenes han sido modeladas aplicando las diferentes técnicas de SR, vease Park et al. (2003), Farsiu et al. (2004) y Katsaggelos et al. (2007).

La modelización del proceso de captura de la secuencia de imágenes observadas, utilizada en SR, suele partir de la señal continua procedente de la escena real que inicialmente puede aparecer contaminada por diversos fenómenos.

Supongamos que utilizamos una cámara digital de BR con un sensor de $N = N_h \times N_v$ fotositos (donde N_h y N_v representa el número fotositos del sensor en horizontal y en vertical respectivamente) para la captura de la secuencia de imágenes observadas y que L es el número de imágenes de BR de la secuencia. Formalizaremos el proceso de captura de la imagen k -ésima, que denotaremos por $\mathbf{y}_k$ el vector columna de tamaño N , en el dominio espacial lexicográficamente ordenada como

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{A}\mathbf{H}_k\mathbf{C}(\mathbf{s}_k)\mathbf{x} + \mathbf{n}_k = \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{x} + \mathbf{n}_k, \quad (2.1)$$

con

$$\mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k) = \mathbf{A}\mathbf{H}_k\mathbf{C}(\mathbf{s}_k), \quad (2.2)$$

donde $\mathbf{x}$ representa la imagen de AR que deseamos estimar (una digitalización de la escena real) con un tamaño de PN píxeles, donde $P > 1$ representa el factor de magnificación respecto a la resolución de las observaciones, $\mathbf{H}_k$ es una matriz de $PN \times PN$ que representa el emborronamiento debido a la PSF, $\mathbf{A}$ es una matriz de $N \times PN$ que representa el submuestreo e integración, $\mathbf{n}_k$ representa el ruido y $\mathbf{C}(\mathbf{s}_k)$ es una matriz de $PN \times PN$ que representa el movimiento de la imagen k -ésima de la secuencia con respecto a la imagen de referencia, y depende de $\mathbf{s}_k = (\gamma_k, c_k, d_k)^T$ que son los parámetros del movimiento (ángulo de rotación y desplazamientos en horizontal y en vertical).

Habitualmente la primera imagen de la secuencia se adopta como imagen de referencia. La resolución de esta será mejorada utilizando el resto de las imágenes de la secuencia de observaciones.

En Elad y Feuer (1999) se distingue entre el caso que se mejora sólo una imagen de cuando se mejora la secuencia completa de observaciones, que denominan *Superresolución estática* y *Superresolución Dinámica* respectivamente. En esta memoria nos centraremos en los modelos de SR estática.

Para la estimación de la imagen de AR $\mathbf{x}$ se requiere resolver conjuntamente los sistemas de ecuaciones lineales definidos para cada observación por la Ec. 2.2, resultando el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\mathbf{s}_1) \\ \mathbf{B}_2(\mathbf{s}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{B}_L(\mathbf{s}_L) \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{n}_L \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

que es un sistema de ecuaciones lineales típicamente mal planteado en el sentido de Hadamard (En Hadamard (1923) se dice que un sistema de ecuaciones está bien planteado si existe solución, es única y la solución es estable numéricamente, siendo esta última condición la que los sistemas de ecuaciones resultantes en la SR suele incumplir). Aún más, en problemas reales estas matrices son desconocidas y deben ser estimadas desde las observaciones, resultando además un sistema inestable (mal condicionado). En consecuencia, la elección del término de regularización adecuado para obtener la imagen de AR (distribución a priori de la imagen de AR en la aproximación Bayesiana) resulta siempre deseable y en ocasiones crucial.

2.4. Aproximaciones no Bayesianas

Entre los diversos enfoques adoptados para resolver el problema de SR, estimar $\mathbf{x}$ a partir de la Ec. (2.3), desde una perspectiva no Bayesiana dis-

tinguiremos los basados en el dominio de la frecuencia, los que utilizan la interpolación, los definidos a partir de la teoría de conjuntos convexos y los que usan el aprendizaje. Los métodos en el dominio de la frecuencia e interpolación se caracterizan porque no afrontan la resolución directa del problema inverso de la SR. Sin embargo, las técnicas de SR basadas en la teoría de conjuntos convexos abordan el problema inverso de la SR directamente ya que, este enfoque permite incluir restricciones e información a priori de la imagen de AR de forma fácil e intuitiva. El enfoque basado en aprendizaje aparece como respuesta a la SR a partir de un número insuficiente de observaciones. En este enfoque el aprendizaje suple la falta de información complementaria que permita recuperar las componentes de alta frecuencia o, la información a priori necesaria como término de regularización para resolver el problema inverso.

2.4.1. SR en el dominio de la frecuencia

El primer algoritmo de SR (tal como se entiende en esta memoria) fue propuesto en Tsai y Huang (1984) para mejorar la resolución de un conjunto de imágenes desplazadas obtenidas por satélite. Este método se basa en la eliminación del aliasing mediante la formulación en el dominio de la frecuencia. Para ello aprovecha la invarianza bajo traslaciones de la transformada de Fourier y formula la relación entre la transformada de Fourier de la señal discreta de la imagen de BR y la señal discreta (sin aliasing) de la imagen AR que deseamos estimar.

Posteriormente en Kim et al. (1990) y Tekalp et al. (1992), este método fue extendido para incluir emborronamiento y ruido, igual para todas las observaciones, y en Kim y Su (1993) estos pueden cambiar de unas observaciones a otras. En Bose et al. (1993) se propone el método de mínimos cuadrados total recursivo (*recursive total least squares (RTLTS)*) para evitar los efectos de los errores de registrado entre las observaciones, e introduce la regularización de Tikhonov Tychonoff y Arsenin (1977). En Su y Kim (1994) se aborda la estimación del movimiento local dividiendo la imagen en bloques que son superpuestos, para la estimación individual de cada bloque. Posteriormente en Rhee y Kang (1999) se sustituye la transformada discreta de Fourier por la transformada discreta del coseno, reduciendo la complejidad espacial y temporal del algoritmo de superresolución.

Los métodos de SR en el dominio de la frecuencia se caracterizan por presentar un mecanismo de SR intuitivo, basado en el principio de supresión del aliasing más allá del límite de Nyquist, resultando un proceso fácil de comprender. Además presentan un bajo coste computacional porque su resolución es altamente paralelizable. En contrapartida, la aplicación de los citados métodos queda limitado a los casos en los que el movimiento entre las observaciones y el modelo de degradación sean invariantes espacialmente (limitando el movimiento a simples traslaciones en vertical y en horizontal).

Las propiedades y ventajas computacionales ofrecidas por el dominio de la frecuencia han contribuido a la aparición de métodos de SR en los que se formula el problema inverso en el dominio de la frecuencia como en Tom y Katsaggelos (1995), Tom et al. (1994), Molina (1994), Molina et al. (1999), Molina et al. (2003a) y Cortijo et al. (2003). Obviamente estos métodos están obligados a utilizar modelos de degradación invariantes espacialmente. No obstante, la adopción de modelos de degradación variantes espacialmente requieren adoptar aproximaciones para su resolución. Así en Villena et al. (2009a) adoptamos una aproximación invariante espacialmente para la resolución del problema SR planteado.

Una revisión detallada de los métodos en el dominio de la frecuencia la podemos encontrar en Borman (2004) y Katsaggelos et al. (2007). En la actualidad esta aproximación es poco utilizada.

2.4.2. SR basada en la Interpolación

En analogía con los métodos de SR en el dominio de la frecuencia, se proponen métodos no iterativos de SR en el dominio espacial.

Para ello, se supone que la matriz de emborronamiento $\mathbf{H}$ es invariante lineal (Linearly Spatial Invariant (LSI)) e igual para todas las observaciones, y además entre las observaciones sólo se admiten movimientos simples de traslación y rotación. En este caso las matrices $\mathbf{H}$ y $\mathbf{C}(\mathbf{s}_k)$ pueden conmutar Elad y Hel-Or (2001), Farsiu et al. (Oct. 2004) permitiendo reescribir la Ec. 2.1 de la forma:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{AC}(\mathbf{s}_k)\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}_k = \mathbf{AC}(\mathbf{s}_k)\mathbf{z} + \mathbf{n}_k, k = 1, 2, \dots, L, \quad (2.4)$$

con $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{z}$.

Note como el modelo de degradación de la Ec. 2.4 supone que las observaciones se obtienen a partir de la imagen de AR emborronada $\mathbf{z}$ y con ruido $\mathbf{n}_k$. Este modelo de degradación nos conduce a un enfoque no iterativo de SR basado en la interpolación y la restauración. Esta aproximación requiere tres etapas:

1. registrado de las imágenes de BR,
2. interpolación no uniforme de las imágenes de BR en el retículo de AR para obtener $\mathbf{z}$ y
3. finalmente, eliminar el emborronamiento y el ruido para obtener $\mathbf{x}$.

Las imágenes de BR son alineadas utilizando algún algoritmo de registro con precisión de subpixel (véase Brown (1992), Zitova y Flusser (2003) y en particular Vandewalle (2006), Villena et al. (2004) y Protter y Elad (2009)). Las imágenes de BR alineadas son colocadas en el retículo de AR en donde se aplica un método de interpolación no uniforme para rellenar los

píxeles omitidos en el retículo de AR y obtener $\mathbf{z}$. Posteriormente eliminamos el emborronamiento y el ruido de $\mathbf{z}$ para obtener $\mathbf{x}$, utilizando cualquier algoritmo clásico de desconvolución con eliminación de ruido.

En Keren et al. (1988) se propone una aproximación para la SR en dos etapas basado en un modelo de traslación y rotación global. En Ur y Gross (1992) se propone una interpolación no uniforme de un conjunto de imágenes de BR desplazadas espacialmente utilizando el teorema de muestreo multicanal generalizado de Yen (1956) y posteriormente en Papoulis (1977), se añade un proceso de eliminación del emborronamiento. Nguyen y Milanfar (2000) proponen un algoritmo de SR usando una interpolación eficiente basada en wavelet y aprovechando la estructura entrelazada de los datos de BR. En Alam et al. (2000) se presenta un esquema de interpolación eficiente basado en los vecinos más cercanos y utilizando un filtrado de Wiener para eliminar el emborronamiento. Elad y Hel-Or (2001) proponen un algoritmo de SR computacionalmente eficiente en base a considerar el movimiento de traslación (sin rotación) entre las observaciones y suponer la matriz de emborronamiento invariante espacial y la presencia de ruido aditivo Gaussiano. En Lertrattanapanich y Bose (2002) se propone un método de triangulación para la interpolación irregular de las observaciones, pero no es robusto frente al ruido. En Pham et al. (2006) se propone aplicar sobre $\mathbf{z}$ una función de aplicabilidad de estructura adaptativa usando un modelo de facetas polinomial (polynomial facet model: en este modelo la intensidad de cada pixel se define polinómicamente en términos de los píxeles del entorno cercano). Takeda et al. (2007) proponen una técnica de núcleo de regresión adaptativa (adaptative steering kernel regression) para interpolar $\mathbf{z}$.

Las técnicas de SR basadas en la interpolación parten de un modelo de observación simple, intuitivo y computalmente eficiente Farsiu et al. (Oct. 2004), Chiang y Boulton (2000). Sin embargo, la realización secuencial de las etapas no garantiza una estimación óptima. Por otro lado, el error de registrado se propagan fácilmente en el proceso de interpolación. Además el proceso de interpolación no es óptimo, ya que no tiene en cuenta los efectos del ruido ni el emborronamiento. Por último, los métodos de SR basados en la interpolación requieren un tratamiento especial de las observaciones para reducir el aliasing debido a que no utilizan conocimiento a priori de la imagen de AR como término de regularización.

2.4.3. SR basada en ejemplos

El éxito de la SR reside en la elección adecuada de la información a priori de la imagen de AR. La regularización mediante la introducción de información a priori de la imagen de AR en el proceso de SR resulta crucial cuando disponemos de pocas observaciones, resultando insuficiente cuando dispongamos de una sola observación. Recientemente basadas en la utilización de ejemplos, han surgido metodologías para regularizar el mal planteamiento

del problema de la SR y poder sobrepasar los límites de la SR cuando el número de observaciones es bajo. Estas metodologías obtienen información a priori de la imagen AR mediante muestreo de otras imágenes similares de forma local, Efros y Leung (1999) y Hertzmann et al. (2001).

Un posible enfoque de la metodologías basadas en ejemplos consiste en usar los ejemplos directamente como en Freeman et al. (2002). Habitualmente en este enfoque se construyen y se mantienen dos conjuntos de patrones de entrenamiento, uno en donde aparecen las muestras de patrones de las imágenes de AR $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ y otro que contiene las muestras de los patrones de las imágenes de BR $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$. Además, cada elemento de un conjunto está relacionado con un elemento del otro mediante un modelo de observación simple $\mathbf{y}_i = \mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{x}_i + \mathbf{n}_i$, formando parejas de patrones $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$. Estas parejas se utilizan para obtener imágenes de HR a base de identificar los patrones de BR que mejor se ajustan, y asociarles el correspondiente patrón de AR. Normalmente, los distintos algoritmos para la identificación de patrones de BR se formulan utilizando modelos de campos aleatorios de Markov: *Markov Random Field (MRF)*. Estos métodos de SR requieren conocer a priori los parámetros del modelo de observación, así como el tamaño elegido para los patrones. Una elección adecuada del tamaño de los patrones resulta determinante en la eficiencia de estas técnicas, así como la variedad y cantidad de ejemplos de entrenamiento utilizados.

Un modo intuitivo de realizar SR usando las parejas de patrones de entrenamiento consistiría en buscar cada patrón de BR en las observaciones, junto con sus patrones vecinos más cercanos entre las parejas de entrenamiento, para obtener sus correspondientes patrones de AR. Desafortunadamente esta estrategia simple puede producir distorsiones, debido al ruido y al mal planteamiento del problema de SR Elad y Datsenko (2009).

En Freeman et al. (2002) se propone un algoritmo de propagación de creencias: *belief-propagation*, Yedidia et al. (2000), basado en el modelo MRF, para seleccionar el mejor patrón de AR entre los vecinos más compatibles con sus patrones adyacentes. Esta idea es extendida en Sun et al. (2003) para mejorar los bordes en la imagen de AR reconstruida y la velocidad del algoritmo, a base de utilizar patrones de los bordes de las imágenes. En Peleg (1990) se propone un algoritmo iterativo de Back-Projection, con el objetivo de asegurarse la consistencia de los datos en toda la imagen.

Estas ideas del enfoque basado en ejemplos se han aplicado para estimar la PSF desconocida en la SR, aplicando una técnica Bayesiana MAP por Wang et al. (2005).

Estos métodos directos basados en patrones de imágenes requieren un conjunto de entrenamiento extenso y con patrones comprobados rigurosamente.

En Tenenbaum et al. (2000) y en Chang et al. (2004) se propone otro método sencillo de SR basados en ejemplos, en el que las parejas de patro-

nes contienen información de vecindad (inclusión de vecinos: *neighbor embedding*). Este método propone patrones con información de localización, que permita relacionarlos con sus vecinos espaciales. Esto es, las relaciones de localización, entre los patrones en BR con sus vecinos, deben mantenerse entre los correspondientes patrones en AR. Este método requiere determinar el valor de los parámetros siguientes: tamaño de los patrones en BR, número de vecinos para cada patrón y el grado de solapamiento entre patrones. Estos parámetros deben adaptarse al conjunto de patrones en AR. En concreto, el número de vecinos se mantiene para el conjunto de patrones en AR y sin embargo, el tamaño del patrón y el grado de solapamiento se obtienen multiplicando cada uno de ellos por el factor de magnificación; obteniéndose el mismo número de patrones en AR y en BR. Cada patrón está representado por los vectores de características de sus píxeles. Cada vector de características contiene cuatro valores, correspondientes a los gradientes de primer y segundo orden, en horizontal y vertical. Básicamente este algoritmo busca, para cada patrón obtenido de la imagen observada, el conjunto de patrones vecinos en el conjunto de patrones ejemplo de BR, que minimicen la distancia euclídea entre ambos vectores de características. Este método genera buenos resultados, incluso cuando utiliza base de datos de patrones menores que las usadas en Yedidia et al. (2000).

En Yang et al. (2008b) se propone un método de SR a partir de una sola observación basado en la teoría de compressed sensing, Candes (2006), Donoho (2006). En este caso los conjuntos de entrenamiento son modelados como dos diccionarios (uno para los patrones de BR y el otro los patrones de AR) y ambos con los mismo número de patrones. La búsqueda de los patrones es similar a la del método anterior, pero seleccionando los vecinos que minimicen la norma ℓ_1 , más robusta al ruido que la norma ℓ_2 (distancia euclídea). Yang et al. (2010) propone una versión más eficiente del algoritmo anterior.

Todos los métodos anteriores que operan con patrones locales se caracterizan por no poder garantizar la optimalidad global de la estimación.

Otro enfoque consiste en obtener, utilizando imágenes ejemplos, la distribución a priori de la imagen de AR a utilizar en la inferencia Bayesiana MAP. Los primeros en aplicar esta idea fueron Baker y Kanade (2002). Baker y Kanade construyen la función de distribución a priori de la imagen, en base a la proximidad entre las derivadas espaciales de la imagen desconocida y las características obtenidas de los ejemplos. Para cada imagen ejemplo se obtienen cuatro características, que son las componentes horizontal y vertical de la pirámide Laplaciana, junto con las componentes vertical y horizontal de la derivada espacial de primer orden, aplicada a la pirámide Gausiana. Este método se utiliza para aumentar de resolución imágenes faciales. Un método similar es propuesto en Pickup et al. (2003) pero aplicado a imágenes de texto. En Datsenko y Elad (2007) se propone una distribución a priori para

el estimador MAP, basada en la media entre todos los posibles bloques (del tamaño de los patrones) que se pueden formar a partir de la imagen de AR con los patrones ejemplos. A su vez, cada bloque es ponderado por valores binarios 0 o 1. De esta forma se puede tener en cuenta todos los píxeles de la imagen de AR en vez de utilizar sólo los píxeles de los bloques vecinos, evitando los valores atípicos debido al ruido. Recientemente en Protter et al. (2009) se ha propuesto un algoritmo de SR basado en la generalización de los algoritmos de promedio no locales (Non Local Mean) para la eliminación del ruido.

La efectividad del enfoque basado en ejemplos mejora si reducimos el ámbito temático de las imágenes sobre las que se aplica la SR, como por ejemplo imágenes de texto, de caras, etc.. A la aplicación de la SR sobre caras se les suele denominar alucinación, siguiendo los trabajos de Baker y Kanade. La alucinación ha sido tratada en Capel y Zisserman (2001), utilizando el análisis en componentes principales, Jolliffe (2002). En Liu et al. (2007) y Liu et al. (2001) se propone la SR de caras en dos pasos. En el primer paso se utilizan los *eigenfaces* (conjunto de autovectores para el reconocimiento de caras Turk y Pentland (1991)) y el segundo paso aplica la aproximación basada en patrones Freeman et al. (2002). La idea de usar los eigenfaces ha sido utilizada en Gunturk et al. (2003), Wang et al. (2005) y en Wang y Tang (2005) entre otros. Yang et al. (2008a) utilizan también dos pasos pero a diferencia de Wang et al. (2005) utilizan la factorización de matrices no negativas para modelar las caras y adoptan el segundo paso propuesto en Yang et al. (2008b) y Yang et al. (2010).

En Jia y Gong (2005) y Jia y Gong (2008) se propone un tensor para tratar las variaciones en las caras. Todos estos trabajos de alucinación han sido aplicados sobre imágenes de caras de frente y han sido evaluados para reconocimiento en Gunturk et al. (2003) y Hennings-Yeomans et al. (2008).

La regularización basada en ejemplos ha resultado efectiva en los caso de SR con un número insuficiente de observaciones. Este enfoque requiere la elección del tamaño de los patrones apropiado para cada caso, del conjunto de imágenes de entrenamiento y por último seleccionar la información a priori de la imagen de AR más adecuada. Un estudio más detallado de los métodos basados en ejemplos lo podemos encontrar en Elad y Datsenko (2009).

2.4.4. SR basada en la Teoría de Conjuntos Convexos

En este apartado mencionaremos los métodos de SR basados en la *proyección sobre conjuntos convexos: Projection onto Convex Sets (POCS)*, Bregman (1967), Gubin et al. (1967).

Esta técnica consiste en formular el problema de SR mediante la definición de múltiples conjuntos convexos de restricciones a los que debe pertenecer la imagen de AR $\mathbf{x}$. La inclusión de diferentes tipos de restric-

ciones, o de información a priori sobre la imagen de AR, como conjuntos convexos de restricciones, resulta fácil e intuitiva. Por ejemplo, el conjunto convexo de imágenes de AR consecuentes con el proceso de captura de la observación k -ésima sería:

$$\mathcal{C}_k = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{B}(\mathbf{s}_k)\mathbf{x} - \mathbf{y}_k\| \leq \sigma^2\}, \quad (2.5)$$

donde σ^2 es la varianza del ruido de la observación. Si disponemos de L observaciones, podremos construir L conjuntos convexos $\mathcal{C}_k$ para $1 \leq k \leq L$. Si suponemos que la imagen es suave podemos definir un conjunto convexo, para que tenga en cuenta esta información a priori, de la forma: $\mathcal{C}_\Gamma = \{\mathbf{x} \mid \|\Gamma\mathbf{x}\|_p < \alpha_p\}$ donde Γ es un operador de suavidad. La imagen de AR que deseamos estimar será la imagen de AR que se encuentre en la intersección de todos los conjuntos convexos definidos. La técnica POCS propone un algoritmo iterativo para encontrar la imagen AR dentro de la intersección de conjuntos convexos desde un valor inicial $\mathbf{x}_0$, de la forma:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathcal{P}_\mathcal{M} \dots \mathcal{P}_1 \mathbf{x}_k, \quad (2.6)$$

donde $\mathcal{M}$ representa el número de conjuntos convexos definidos y $\mathcal{P}_k$ para $k = 1, 2, \dots, \mathcal{M}$ representan los operadores de proyección sobre los distintos conjuntos convexos. En cada iteración se modifica la estimación de la imagen AR, a partir del error entre las observaciones, y las observaciones generadas a partir de la imagen de AR estimada en la iteración anterior, y esto hasta que se cumplan todas las restricciones, supuesto que la intersección de todos los conjuntos es no vacía.

La SR utilizando POCS fue propuesta en Stark y Oskoui (1989). las extensiones más completas del trabajo anterior la encontramos en Patti et al. (1997) que utiliza una PSF variable espacialmente, tiene en cuenta el emborronamiento por movimiento y del sensor y los efectos de aliasing derivados del submuestreo, a diferencia de la mayoría de métodos de SR que tan solo contemplan el emborronamiento de la lente. En Katsaggelos (1990) se definen los conjuntos convexos, en base a las restricciones de la imagen de AR en forma de elipsoides. Como es sabido, la intersección de los conjuntos convexos no garantiza una solución única, por ello, propone como solución el centro del elipsoide menor que contenga la intersección. Posteriormente esta aproximación fue aplicada en Tom y Katsaggelos (2001). Esta solución coincide con la solución Bayesiana MAP de un problema similar. Un análisis y comparación de los métodos ML, MAP y POCS es realizado en Elad y Feuer (1997) que proponen un enfoque híbrido. En Patti y Altunbasak (2001) se extiende el trabajo anterior para permitir la interpolación a imágenes de AR, y se modifican las restricciones de los conjuntos para reducir el escalonado en los bordes.

La gran ventaja de los métodos de SR según el enfoque POCS reside en la facilidad de su implementación, flexibilidad para utilizar modelos de

observación generales y en la facilidad de incluir información a priori. Sin embargo, el coste computacional es alto porque la convergencia suele ser lenta. Por último, la solución no es única, y depende de la solución inicial escogida. No está resuelta la estimación conjunta del movimiento utilizando POCS, como en las técnicas Bayesianas.

2.5. Aproximacion Bayesiana

Pasamos a describir a continuación la aproximación a la SR utilizada en esta memoria, la aproximación Bayesiana. En la teoría estadística, un proceso aleatorio o estocástico permite caracterizar sucesiones de valores de variables aleatorias que evolucionen en función de otras. Desde esta perspectiva, los problemas que abordan la ciencia y la ingeniería podrían considerarse como estudios sistemáticos de las relaciones entre las variables que describe el acontecimiento de fenómenos naturales. En concreto, la observación de un fenómeno concreto nos conduce a establecer relaciones con el acontecimiento de otros fenómenos. Mediante un proceso de abstracción, estos fenómenos se representan mediante los datos observados, y modelados estocásticamente, con el objetivo de poder predecir futuros valores de los datos (que representan los fenómenos que acontecerán). Ante la complejidad de la realidad, el diseñador del modelo selecciona los datos de los fenómenos observados más relevantes, considerando al resto de datos, en los que se incluyen los datos subyacentes desconocidos, como ruido, Beal (2003).

Aplicando la teoría de la probabilidad, a los distintos observables se les asocian variables aleatorias que son modeladas mediante distribuciones de probabilidad parametrizadas (*Modelos Generativos*), cuyos parámetros son desconocidos. Estos parámetros deben explicar lo mejor posible los datos observables. Sea $\mathbf{y}$ el conjunto de variables aleatorias que representan los observables y θ el conjunto de parámetros, entonces

$$p(\mathbf{y}|\theta) \tag{2.7}$$

representa el modelo generativo del conjunto de observable $\mathbf{y}$, conocido el conjunto de parámetros θ . Esta distribución de probabilidad es conocida también como *verosimilitud* de las observaciones.

Habitualmente en los modelos se advierte la presencia de variables desconocidas, que interactúan con los parámetros para generar las observaciones. Sea $\mathbf{x}$ el conjunto de variables desconocidas, entonces el modelo generativo, o verosimilitud de las observaciones será:

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \theta). \tag{2.8}$$

2.5.1. Modelización Bayesiana.

La modelización Bayesiana considera los parámetros desconocidos y las variables conocidas y desconocidas, como variables aleatorias. Los métodos Bayesianos de inferencia permiten deducir distribuciones de probabilidad y valores esperados para las variables desconocidas, a partir de las observaciones.

Formulemos el modelo Bayesiano correspondiente a nuestro modelo de degradación de la Ec. 2.1. El primer paso de la modelización Bayesiana requiere determinar cuales son las variables conocidas y las desconocidas. En la Ec. 2.1 son conocidas la observación $\mathbf{y}_k$ y el emborronamiento $\mathbf{H}_k$, que en general se supone conocido o estimado previamente, utilizando los conocidos algoritmos de desconvolución ciega (vease Bishop et al. (2007), F. Tsumuraya y Baba (1994), Likas y Galatsanos (2004), Mateos et al. (2005), Bronstein et al. (2005), Molina et al. (2006), Bioucas-Dias (2006), Babacan et al. (2009)). El resto de las variables son desconocidas, en concreto, la imagen original de AR $\mathbf{x}$, el movimiento entre las imágenes y la imagen de referencia, representado por el vector $\mathbf{s}_k$, y el ruido aditivo $\mathbf{n}_k$. Junto con todas estas variables, además debemos considerar como desconocidos los parámetros de las distribuciones de probabilidades de cada una de estas variables, conocidas y desconocidas.

El modelo generativo, o verosimilitud de la observación k -ésima sería:

$$p(\mathbf{y}_k | \theta_k, \mathbf{x}, \mathbf{s}_k), \quad (2.9)$$

donde θ_k representa el conjunto de parámetros desconocidos, de las distribuciones de probabilidades definidas sobre las variables (conocidas y desconocidas).

Suponiendo independiente el proceso de captación de cada una de las observaciones, el modelo generativo correspondiente al proceso que captura el conjunto de imágenes es:

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \{\theta_k\}, \{\mathbf{s}_k\}) = \prod_{k=1}^L p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}, \theta_k, \mathbf{s}_k). \quad (2.10)$$

La modelización Bayesiana del proceso de SR se basa en definir la distribución conjunta. En nuestro caso

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \{\theta_k\}, \{\mathbf{s}_k\}) &= p(\mathbf{x}, \{\theta_k\}, \{\mathbf{s}_k\}) p(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \{\theta_k\}, \{\mathbf{s}_k\}) \\ &= p(\mathbf{x} | \{\theta_k\}) p(\{\theta_k\}) p(\{\mathbf{s}_k\}) p(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \{\theta_k\}, \{\mathbf{s}_k\}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Note como en la distribución conjunta del modelo Bayesiano aparecen las verosimilitudes de las variables conocidas y el conocimiento a priori sobre las variables estocásticas desconocidas, como la imagen original $\mathbf{x}$ y

el movimiento $\{\mathbf{s}_k\}$, que se plasman en las distribuciones de probabilidad a priori $p(\mathbf{x}|\{\theta_k\})$ y $p(\{\mathbf{s}_k\})$, respectivamente.

Obviamente, el problema se simplifica si las variables y parámetros desconocidas, se conocen o estiman previamente. En particular, el movimiento puede ser estimado previamente, aplicando alguno de los métodos de registrado conocidos (vease Brown (1992) y Zitova y Flusser (2003)) y los parámetros seleccionados manualmente. En este caso se obtendría la siguiente distribución conjunta:

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = p(\mathbf{x})p(\mathbf{y}|\mathbf{x}). \quad (2.12)$$

2.5.2. Inferencia Bayesiana

Una aplicación inmediata de la inferencia probabilística, en el paradigma Bayesiano, sería estimar los parámetros y las variables desconocidas (en nuestro caso $\mathbf{x}$, $\{\mathbf{s}_k\}$ y $\{\theta_k\}$) maximizando la función de verosimilitud,

$$\{\hat{\mathbf{x}}, \{\hat{\theta}_k\}, \{\hat{\mathbf{s}}_k\}\} = \underset{\mathbf{x}, \{\theta_k\}, \{\mathbf{s}_k\}}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \{\theta_k\}, \{\mathbf{s}_k\}). \quad (2.13)$$

A este enfoque se le suele denominar *Máxima Verosimilitud: Maximum Likelihood (ML)*. La solución de la SR mediante ML suele responder a una ecuación mal condicionada, siendo necesario introducir información a priori para obtener una buena solución.

La solución mayoritariamente utilizada en SR mediante inferencia Bayesiana es la denominada *Máximo a Posteriori: Maximum a Posteriori (MAP)*, y consiste en encontrar los parámetros y variables desconocidas que maximicen la probabilidad a posteriori. La probabilidad a posteriori se define en base a la probabilidad conjunta y a las reglas de inferencia de Bayer. Adoptando la probabilidad conjunta definida en la Ec. 2.11, resulta la probabilidad a posteriori definida de la forma:

$$p(\mathbf{x}, \{\theta_k\}, \{\mathbf{s}_k\}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{x}|\{\theta_k\})p(\{\theta_k\})p(\{\mathbf{s}_k\})p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \{\theta_k\}, \{\mathbf{s}_k\})}{p(\mathbf{y})}. \quad (2.14)$$

$p(\mathbf{x}|\{\theta_k\})$, $p(\{\mathbf{s}_k\})$, y $p(\{\theta_k\})$ representan las funciones de densidad de probabilidad a priori de $\mathbf{x}$, $\{\mathbf{s}_k\}$ y $\{\theta_k\}$ respectivamente. Note cómo $p(\mathbf{y})$ puede considerarse constante, ya que no depende de $\mathbf{x}$. En consecuencia, el estimador MAP sería

$$\{\hat{\mathbf{x}}, \{\hat{\theta}_k\}, \{\hat{\mathbf{s}}_k\}\} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{x}, \{\theta_k\}, \{\mathbf{s}_k\}} p(\mathbf{x}, \{\theta_k\}, \{\mathbf{s}_k\} | \mathbf{y}) \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}, \{\theta_k\}, \{\mathbf{s}_k\}} [-\log p(\mathbf{x} | \{\theta_k\}) - \log p(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \{\theta_k\}, \{\mathbf{s}_k\}) \\ &\quad - \log p(\{\theta_k\}) - \log p(\{\mathbf{s}_k\})]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

La posibilidad de resolver analíticamente la Ec. 2.16 está condicionada por la forma que tengan las distribuciones de probabilidad a priori, y verosimiludes. En muchas ocasiones, se debe recurrir a soluciones numéricas. Una forma de simplificar la resolución del estimador MAP consiste en suponer el movimiento, los parámetros del modelo y el emborronamiento conocidos. En este caso el estimador MAP resultante, para un valor fijo de los parámetros sería

$$\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} [-\log p(\mathbf{x}) - \log p(\mathbf{y} | \mathbf{x})]. \quad (2.17)$$

Note cómo aumenta la envergadura del problema a medida que los parámetros y/o variables desconocidas deben estimarse también.

2.5.3. SR utilizando Maxima Verosimilitud (ML)

En la literatura no encontramos muchas propuestas de SR que utilicen ML. No obstante, mencionaremos la propuesta dada en Tom y Katsaggelos (1995) y Tom et al. (1994), en donde se aborda la SR utilizando ML, usando un algoritmo de *Esperanza-Maximización: Expectation-Maximization (EM)* propuesto en Dempster et al. (1977). En estos trabajos se adopta como término de regularización una distribución a priori auto-regresiva: *Auto-Regressive (AR)*. El método de SR propuesto consta de dos pasos. En el primer paso se registran las observaciones y se elimina el emborronamiento y el ruido. Y en el segundo paso, se interpolan todas las observaciones en el retículo de AR. Aunque gran parte del problema se formula en el dominio espacial, la solución se obtiene en el dominio de la frecuencia, porque sólo se consideran desplazamientos entre las observaciones.

2.5.4. SR utilizando Máximo a Posteriori (MAP)

En la literatura encontramos numerosas metodologías de SR que adoptan la aproximación Bayesiana e inferencia MAP (vease Kang y Chaudhuri (Eds.) (2003), Borman (2004), Bose et al. (2004), Farsiu et al. (2004), Ng et al. (2006), Katsaggelos et al. (2007), Katsaggelos y Molina (2009) y Milanfar (2010)). Básicamente, las diversas técnicas de SR que optan por la inferencia MAP se distinguen en los modelos elegidos para la verosimilitud y las

distribuciones a priori, así como las variables y parámetros desconocidos estimados conjuntamente. Inicialmente, las técnicas Bayesianas de SR abordan la estimación de la imagen de AR suponiendo conocidas el resto de variables y parámetros del modelo. Como es conocido, la calidad de la imagen de AR estimada depende de la precisión (a nivel de subpixel), con la que el movimiento haya sido estimado, Vandewalle et al. (2006), Vandewalle (2006), y de la elección adecuada para los valores de los parámetros. Pero también es conocida la dificultad real para obtener una estimación precisa de la citada información.

Schultz y Stevenson fueron los pioneros en la aplicación de la modelización Bayesiana e inferencia MAP para resolver el problema de SR en Schultz y Stevenson (1992). En ese trabajo se supone que el emborronamiento $\mathbf{H}$ y el movimiento $\{\mathbf{s}_k\}$ de todas las observaciones son conocidos, resultando el estimador MAP de la imagen AR $\mathbf{x}$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmax}} [p(\mathbf{x})p(\mathbf{y}|\mathbf{x})] \\ &= \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} [-\log p(\mathbf{x}) - \log p(\mathbf{y}|\mathbf{x})].\end{aligned}\quad (2.18)$$

Se utiliza una verosimilitud, o modelo de degradación, $p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x})$ gaussiano, suponiendo ruido blanco gaussiano como:

$$p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}, \beta_k) = \frac{1}{Z(\beta_k)} \exp \left[-\frac{\beta_k}{2} \|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}\|^2 \right], \quad (2.19)$$

donde β_k representa al inversa a la varianza al ruido, y $Z(\beta_k)$ es la función de partición.

Como distribución a priori de $\mathbf{x}$, utilizaron el modelo de campo aleatorio de Markov de Huber (*Huber Markov Random Field HMRF*). Este modelo a priori se formula en base a la distribución de Gibbs

$$p(\mathbf{x}|\Omega) = \frac{1}{\mathbf{Z}(\Omega)} \exp(-\mathbf{U}(\mathbf{x}, \Omega)), \quad (2.20)$$

cuya función de energía se define como $\mathbf{U} = \sum_{c \in \mathcal{C}} \mathbf{V}_c(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{V}_c(\mathbf{x})$ es una *función de potencial* definida sobre (*corros: cliques*) c en la imagen, y con $\mathbf{Z}(\Omega)$ como constante de normalización. En este caso, los autores adoptan una función de energía definida mediante una función de Huber de la forma:

$$\rho(\Delta) = \begin{cases} \Delta^2 & |\Delta| \leq \mu \\ 2\mu|\Delta| - \mu^2 & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (2.21)$$

donde Δ y Δ^2 representan la primera y segunda derivada de la imagen respectivamente y μ un parámetro de la función. Así resulta que $\sum_{c \in \mathcal{C}} \mathbf{V}_c(\mathbf{x}) =$

$\sum_{k=1}^{PN} \left(\sum_{i=1}^4 \rho(\Delta_i \mathbf{x}_k) \right)$, donde Δ_i representa la derivada en las cuatro direcciones i .

Posteriormente, Schultz y Stevenson (1994) adoptaron una función de energía cuadrática. En concreto, un modelo de campos aleatorio de Markov Gaussiano (*Gaussian Markov Random Field (GMRF)*), Bouman y Sauer (1993), cuya función de energía es de la forma:

$$\mathbf{U} = \alpha \sum_{c \in \mathcal{C}} \mathbf{V}_c(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{2} \mathbf{x}^t \mathbf{C} \mathbf{x}, \quad (2.22)$$

siendo α la inversa de la varianza, y $\mathbf{C}$ la inversa de la matriz de covarianza definida en base a los cliques, que proporciona un determinado grado de suavidad a la imagen.

En ambas propuestas, los parámetros de las distribuciones se ajustan experimentalmente, y la imagen de AR consecuente con Ec. 2.18 se obtiene resolviendo un sistema de ecuaciones lineales de grandes dimensiones (el tamaño de la imagen de AR al cuadrado), cuya resolución directa resulta intratable. Para su resolución, los autores utilizaron el método numérico del gradiente descendente.

También en Hunt y Sementilli (1992), se aborda la SR de imágenes astronómicas aplicando inferencia MAP, pero a diferencia de los trabajos anteriores, en este se opta por distribuciones de Poisson, para modelar el modelo de degradación.

En Cheeseman et al. (1994) y en Cheeseman et al. (1996), la SR MAP se utilizó para la integración de imágenes enviadas por el satélite Viking. En este caso, tanto para la verosimilitud como para la distribución a priori de la imagen de AR se utilizaron distribuciones gaussianas. En concreto, la distribución a priori relacionaba cada pixel con sus cuatro vecinos más próximos.

En D.P.Capel (2001) se opta por un modelo a priori *GMRF, con supresión del gradiente general: general gradient-suppressing GMRF*, que es una variante del modelo GMRF, de la forma

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \exp \left(-\gamma \|\mathbf{D}\mathbf{x}\|_2^2 \right), \quad (2.23)$$

donde $\mathbf{D}$ es un operador gradiente. Esta distribución a priori conduce a soluciones suaves.

También se ha utilizado el modelo a priori de *Variación Total: Total Variation (TV)* muy utilizada en restauración y propuesto por Rudin et al. (1992). Una variante del modelo a priori TV, denominada *Variación Total Bilineal: Bilinear Total Variation (BTV)* se propuso en Farsiu et al. (2003). En este trabajo optaron por un modelo de ruido Laplaciano, en vez del ruido gaussiano, para la verosimilitud, y una función de energía para la distribución

a priori de $\mathbf{x}$ definida de la forma:

$$\mathbf{U} = \lambda \sum_{l,m=-n}^n \alpha^{|l|+|m|} \left\| \mathbf{x} - \mathbf{S}_h^l \mathbf{S}_v^m \mathbf{x} \right\|_1, \quad (2.24)$$

donde λ , α y n son parámetros de la distribución a priori, y $\mathbf{S}_h^l$ y $\mathbf{S}_v^m$ son matrices que representan operadores de desplazamiento l y m píxeles en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente.

La estimación conjunta del movimiento entre las observaciones (pero restringido a desplazamientos en horizontal y en vertical) se estudió en Hardie et al. (1997). Para ello, el estimador MAP utilizado fue

$$\begin{aligned} \{\hat{\mathbf{x}}\} &= \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmax}} [p(\mathbf{x})p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \{\mathbf{s}_k\})] \\ &= \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} [-\log p(\mathbf{x}) - \log p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \{\mathbf{s}_k\})]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

En este trabajo utilizaron las mismas funciones de distribución de probabilidades, para la verosimilitud de las observaciones, que en Schultz y Stevenson (1992), y una matriz de degradación $\mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)$ dependiente sólo del movimiento $\mathbf{s}_k$. Sin embargo, adoptaron una distribución a priori de la imagen de AR GMRF

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{PN}{2}} |\mathbf{C}_x|^{\frac{1}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2} \|\mathbf{x}^t \mathbf{C}_x^{-1} \mathbf{x}\|^2 \right), \quad (2.26)$$

donde $\mathbf{C}_x$ representa la matriz de covarianza de $\mathbf{x}$.

En Hardie et al. (1997) para estimar el movimiento se utilizó

$$\hat{\mathbf{s}}_k = \underset{\mathbf{s}_k}{\operatorname{argmin}} [\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}]^t [\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}], \quad (2.27)$$

y se aplica un mecanismo tradicional de ajuste por bloques (*block matching*). Para la resolución del estimador MAP, propusieron un algoritmo iterativo en dos pasos, basado en la *Minimización Alternativa: Alternating Minimization (AM)*. En el primer paso estimaron la imagen $\mathbf{x}$ fijando los valores del movimiento $\{\mathbf{s}_k\}$, y en el paso siguiente, fijaron $\mathbf{x}$ y estimaron el movimiento. Para la estimación de la imagen de AR utilizaron el método del gradiente descendente.

Este trabajo se extendió, para tener en cuenta también las rotaciones, en Hardie et al. (1998). Para estimar los parámetros del movimiento, supusieron que los ángulos de rotación entre las observaciones eran muy pequeños, para poder aproximar los términos de la rotación en la ecuación del movimiento,

por los primeros términos de Taylor. En Mateos et al. (2000), Segall et al. (2003) y Segall et al. (2004) también se utilizó el ajuste por bloques para la estimación conjunta del movimiento. En Ng et al. (2002) el movimiento se estima conjuntamente, pero suponiendo desplazamientos muy pequeños alrededor de cada pixel.

Unos de los problemas que plantea la SR utilizando la inferencia MAP es la elección adecuada de los valores de los parámetros de las distribuciones. En este sentido, en Molina et al. (2003a) se lleva a cabo la estimación conjunta de la imagen de AR y los parámetros de la modelización Bayesiana. En ese trabajo, utilizaron para la verosimilitud la definición dada en la Ec. 2.19 y como la distribución a priori de $\mathbf{x}$ la definida por la expresión

$$p(\mathbf{x}|\alpha) \propto \alpha^{\frac{PN}{2}} \exp \left\{ -\frac{\alpha}{2} \|\mathcal{C}\mathbf{x}\|^2 \right\}, \quad (2.28)$$

donde $\mathcal{C}$ representa el operador Laplaciano y α es el parámetro de este modelo a priori. Este tipo de modelos a priori suele denominarse *modelos Auto-regresivos Simultáneos: Simultaneous Autoregressive (SAR)* Ripley (1981). También adoptaron un marco de modelización bayesiano jerarquizado, en el que los parámetros $\{\beta_k\}$ y α se denominan *hiperparámetros*. Para la estimación conjunta proponen un algoritmo EM en dos pasos. En el primer paso, se estiman los hiperparámetros utilizando $p(\mathbf{y}|\alpha, \{\beta_k\})$, que se obtiene mediante la marginalización de la probabilidad conjunta sobre la imagen $\mathbf{x}$, resultando

$$\begin{aligned} \{\{\hat{\beta}_k\}, \alpha\} &= \operatorname{argmax}_{\{\beta\}, \alpha} \int_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}|\alpha) p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \{\beta_k\}) d\mathbf{x} \\ &= \operatorname{argmax}_{\{\beta\}, \alpha} p(\mathbf{y}|\{\beta_k\}, \alpha). \end{aligned} \quad (2.29)$$

En el segundo paso, se estima la imagen de AR $\mathbf{x}$ usando los valores de los hiperparámetros estimados en el paso anterior.

Tipping y Bishop (2003) hacen la estimación conjunta del movimiento, la PSF y la imagen de AR $\mathbf{x}$. Para ello, modelizan la verosimilitud, la distribución a posteriori y la distribución a priori mediante distribuciones Gaussianas. Para la estimación del movimiento, y la PSF utilizan la función de verosimilitud marginalizada sobre la imagen de AR. La distribución a priori utilizada en ese trabajo es $p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}|0, \mathbf{Z}_{\mathbf{x}})$ con

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{x}}(i, j) = \mathcal{A} \exp \left(-\frac{\|v_i - v_j\|^2}{r^2} \right), \quad (2.30)$$

donde v_i y v_j representan las posiciones bidimensionales de los píxeles en i -ésimo y j -ésimo lugar, de la imagen $\mathbf{x}$ en forma lexicográfica, r define la

distancia escalar para la correlación en el MRF y $\mathcal{A}$ determina su fuerza. Esta distribución a priori establece una relación ponderada por la distancia de cada pixel con los píxeles que les rodean. La utilización de esta distribución a priori proporciona una matriz del sistema, para la estimación de $\mathbf{x}$, mejor condicionada que las GMRF citadas previamente.

En Woods et al. (2006) se aborda la estimación conjunta del movimiento (restringido a desplazamientos en horizontal y en vertical) y los parámetros de las distribuciones. Para ello modelan la verosimilitud y la distribución a priori de la imagen de AR $\mathbf{x}$ como en Molina et al. (2003b), y trabajan en el dominio de la frecuencia.

En Pickup et al. (2007) se realiza la estimación conjunta del movimiento, y de los parámetros del emborronamiento, utilizando un modelo de verosimilitud como el de Schultz y Stevenson (1992), y como distribución a priori de $\mathbf{x}$ una función de Huber. En este trabajo se aplicó el análisis empírico consistente en integrar la probabilidad conjunta con respecto al movimiento y la PSF.

La estimación conjunta de las variables desconocidas, así como la adopción de modelos complejos para las distribuciones a priori, permiten potenciar la calidad de las imágenes de AR estimadas. Pero aplicar la marginalización para realizar la estimación conjunta nos obliga a proponer distribuciones integrables, lo que restringe los tipos de modelos utilizables para la verosimilitud y para las distribuciones a priori.

Una forma de salvar este problema consiste en aplicar técnicas de muestreo, como el de *Monte Carlo con Cadenas de Markov: Markov Chain Monte Carlo (MCMC)*; así se hace en Neal (1993), Andrieu et al. (2003), Ruanaidh y Fitzgerald (1996) y recientemente en Tian y Ma (2010). Sin embargo, aunque la técnica MCMC garantiza la convergencia a nivel teórico, alcanzarla en la práctica requiere un proceso de cálculo muy intensivo.

Recientemente, la aproximación variacional se ha propuesto como una forma eficiente de paliar las necesidades computacionales de la simulación, y de poder abordar estimaciones conjuntas de modelos más complejos.

2.5.5. SR con la Aproximación Variacional

Un estudio detallado de la aproximación variacional a la inferencia bayesiana la podemos encontrar en Beal (2003). Los métodos variacionales son generalizaciones del algoritmo EM, para calcular los estimadores ML o MAP. Aunque el algoritmo EM es general y ha sido utilizado en una amplia diversidad de problemas, requiere que la función de probabilidad a posteriori sea calculable, lo que limita los modelos de degradación y de distribuciones a priori utilizables.

En este sentido, la aportación de los modelos variacionales consiste en aproximar la posteriori $p(\mathbf{x}, \Theta | \mathbf{y})$ mediante otra función de distribución más

simple $q(\mathbf{x}, \Theta)$, donde $\Theta = \{\{\theta_k\}, \{\mathbf{s}_k\}\}$. La distribución $q(\mathbf{x}, \Theta)$ se obtiene mediante la minimización de la divergencia de Kullback-Leibler (KL) Kullback y Leibler (1951), Kullback (1959) entre ambas distribuciones.

La divergencia de KL se define como:

$$\begin{aligned} KL(q(\mathbf{x}, \Theta) || p(\mathbf{x}, \Theta | \mathbf{y})) &= \int q(\mathbf{x}, \Theta) \log \left(\frac{q(\mathbf{x}, \Theta)}{p(\mathbf{x}, \Theta | \mathbf{y})} \right) d\mathbf{x} d\Theta \\ &= \int q(\mathbf{x}, \Theta) \log \left(\frac{q(\mathbf{x}, \Theta)}{p(\mathbf{x}, \Theta, \mathbf{y})} \right) d\mathbf{x} d\Theta \\ &+ \text{Const}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

que siempre será positiva y será cero sólo cuando $q(\mathbf{x}, \Theta) = p(\mathbf{x}, \Theta | \mathbf{y})$.

Para reducir la complejidad de cálculo se suele suponer la factorización:

$$q(\mathbf{x}, \Theta) = q(\mathbf{x})q(\{\theta_k\})q(\{\mathbf{s}_k\}), \quad (2.32)$$

considerando que las distribuciones aproximadas sobre la imagen y los parámetros desconocidos son independientes.

Recientemente las distribuciones a priori variantes espacialmente (como el modelo TV propuesto en Rudin et al. (1992)) han despertado el interés de la comunidad científica (vease Chan y Shen (2005) y Chan et al. (2005)), y también en el campo de la SR. El modelo de distribución a priori TV se caracteriza, a diferencia de las distribuciones a priori independientes espacialmente como el SAR, porque el suavizado de la imagen real se realiza en la dirección paralela a los bordes, y no en la dirección ortogonal. Este tipo de distribuciones a priori ha sido abordada eficientemente utilizando la aproximación variacional.

Una aproximación al modelo a priori TV se propuso en Farsiu et al. (2003) como ya ha sido mencionado en 2.5.4. En Ng et al. (2007) se propone un método de SR a partir de imágenes de vídeo utilizando una regularización mediante el modelo TV, resultando un sistema de ecuaciones no lineales de Euler-Lagrange que es resuelto mediante el método iterativo de punto fijo y aplicando técnicas de preconditionamiento.

En Babacan et al. (2008c) se adopta el modelo TV para modelar la distribución a priori de la imagen $\mathbf{x}$, abordando la estimación conjunta mediante una aproximación variacional, ya que, mediante la marginalización es inviable. Para ello se propone un método de SR basado en la mayorización de la distribución a priori TV, utilizando técnicas variacionales. La SR se plantea siguiendo el enfoque bayesiano jerarquizado MAP, estimando conjuntamente los hiperparámetros y la imagen de AR $\mathbf{x}$ a partir de las observaciones, suponiendo conocidos tanto el movimiento entre las observaciones como las PSF. Este trabajo se extendió con la estimación conjunta del movimiento y los hiperparámetros en Babacan et al. (2010).

En Kanemura et al. (2009) se aplica la aproximación variacional y se propone un modelo de distribución a priori Gaussiano que preserva los bordes,

y definido en términos del cuadrado del gradiente.

En Villena et al. (2009a) se adopta la norma ℓ_1 sobre el gradiente horizontal y vertical como distribución a priori de la imagen de AR $\mathbf{x}$. Para la estimación conjunta de los hiperparámetros se aplica una mayorización de la citada distribución a priori, dentro de la aproximación variacional, como en Babacan et al. (2008c). Este trabajo forma parte de las aportaciones de esta memoria y será desarrollado en el capítulo 3.

Las distintas distribuciones a priori utilizadas en SR, y en reconstrucción, reflejan parte de las propiedades de una imagen real. Esto ha hecho pensar en la posibilidad de utilizar conjuntamente más de una distribución a priori, con el objeto de recoger la diversidad de propiedades que pueden confluir en cada pixel, y en aplicar la aproximación variacional para la estimación conjunta. En este sentido en Villena et al. (2010a) y Villena et al. (2010c) se ha propuesto una aproximación variacional de una combinación lineal de modelos de probabilidad a posteriori, contruidos con diferentes distribuciones a priori. En Villena et al. (2010a) se combinan modelos que usan las distribuciones a priori TV y SAR, mientras que en Villena et al. (2010c), Villena et al. (2010b) se combinan una distribución a priori SAR con la obtenida de aplicar la norma ℓ_1 sobre el gradiente vertical y horizontal. Estos trabajos, junto con Villena et al. (2011) en preparación, forman parte de la aportaciones de esta tesis y serán desarrollados en los capítulos 4 y 5.

2.6. Conclusiones

La SR, como se entiende en esta memoria, ha sido abordada desde una amplia diversidad de enfoques y perspectivas, cada una de ellas con sus ventajas e inconvenientes.

Entre los no Bayesianos, el enfoque en el dominio de la frecuencia, limita los modelos de degradación aplicables. Otros enfoques no Bayesianos permiten utilizar modelos más complejos pero exigen un alto coste computacional. En estos métodos, la estimación de la imagen de AR requiere el conocimiento previo del resto de la información desconocida del modelo. Esto limita la calidad de las estimaciones de la imagen de AR que depende mucho de la complejidad del modelo de degradación adoptado, y de la precisión con la que hayan sido estimados los parámetros desconocidos, como por ejemplo el movimiento. En concreto, es bien conocida la dificultad de conseguir un registrado preciso a nivel de subpixel a partir de las observaciones de BR, y la conveniencia de llevar a cabo el registrado a nivel de AR.

El enfoque Bayesiano permite la estimación de la imagen de AR conjuntamente con el resto de parámetros desconocidos, obviamente, a costa de aumentar la complejidad. En las secciones anteriores hemos visto las diferentes estrategias posibles para obtener el estimador MAP conjunto, como

por ejemplo el análisis de la evidencia, el análisis empírico, la utilización de técnicas de muestreo y la aproximación variacional. Tanto el análisis de la evidencia como el empírico restringen los modelos utilizables para la verosimilitud y las distribuciones a priori. Estas limitaciones pueden superarse aplicando técnicas de muestreo, pero con un elevado coste computacional. En contrapartida, la aproximación variacional proporciona una estimación eficiente, permitiendo utilizar distribuciones complejas, como las propuestas en esta memoria, la utilización de modelos de distribución a priori variantes espacialmente y la combinación de modelos.

En la modelización Bayesiana, tanto la imagen de AR como los hiperparámetros suelen aparecer definidos en términos de la inversa de la matriz de covarianza. Esta matriz suele ser de elevadas dimensiones ($PN \times PN$, número de píxeles de la imagen de AR al cuadrado), y *ralas* (*sparse*), si el problema se formula en el dominio espacial. Esto añade a los citados métodos de SR la complejidad adicional derivada de la necesidad de invertir la matriz de covarianza resultante. En un principio, cuando la estimación se refiere sólo a la imagen de AR, como en Schultz y Stevenson (1992), este problema queda resuelto de forma eficiente mediante el conocido método del gradiente descendente. Sin embargo, la necesidad de invertir la matriz de covarianza persiste para la estimación de los hiperparámetros, lo que obliga a buscar un método aproximado adecuado para invertir la citada matriz. En Villena et al. (2009b) se ha realizado un estudio de las técnicas de inversión aproximadas de matrices del tipo de las matrices de covarianza resultantes en los métodos de SR Bayesianos. Ese trabajo forma parte de las aportaciones de esta memoria y será desarrollado en el apéndice A.

Capítulo 3

Superresolución Bayesiana Variacional para distintas Distribuciones a Priori sobre la Imagen de AR

3.1. Introducción

La elección del modelo a priori no solo permite evitar el mal condicionamiento del problema inverso de la SR, sino que, en la práctica, la elección de un buen modelo a priori para la imagen de AR determina la calidad de las reconstrucciones y repercute en el costo computacional de los algoritmos de SR. Así se explica la amplia variedad de modelos a priori aparecidos en la literatura, lo que pone de manifiesto la dificultad de encontrar un modelo a priori válido para imágenes de cualquier tipo. Estamos ante un problema abierto, Elad y Datsenko (2009), objeto de estudio de la comunidad científica durante las últimas tres décadas y uno de los problemas fundamentales en el procesamiento de imágenes.

El modelo a priori actúa como término de regularización que mejora la estabilidad de la Ec. (2.3), como ya se explica en la sección 2.3. Inicialmente se utilizaba la regularización de Tikhonov Tychonoff y Arsenin (1977) que en el enfoque Bayesiano es considerado como un modelo a priori GMRF Li (2009). Estos modelos a priori se han utilizado mucho, ver entre los primeros trabajos: en segmentación de imágenes Derin y Elliott (1987), restauración de imágenes clásica Geman y Geman (1984), en SR Schultz y Stevenson (1996), Hardie et al. (1997) y en desconvolución ciega Zhang (1993), Chipman y Jeffs (1999). Los modelos GMRF siguen una distribución de Gibbs Ec. (2.20) con una función de energía local como en Ec. (2.22). Un ejemplo de GMRF es el SAR Ripley (1981), que ha sido ampliamente utilizado en SR (véase

Katsaggelos et al. (2007)). La adopción de estos modelos a priori, y más concretamente la del modelo SAR, en los procesos de reconstrucción para SR conlleva la obtención de imágenes demasiado suaves, que no reproducen bien las texturas ni los bordes. El modelo SAR elimina bien el ruido si no es muy intenso, pero cuando el ruido crece las zonas suaves de la imagen presentan un granulado molesto.

El modelo TV propuesto en Rudin et al. (1992), exhibe, en cambio, un comportamiento bastante diferente. Se caracteriza por realzar los bordes y suavizar las texturas. Esto lo hace muy interesante en los problemas de restauración y SR. El modelo TV ha despertado un gran interés en los últimos años, como puede verse en Chan y Shen (2005), Chan et al. (2005) y en Farsiu et al. (Oct. 2004). Recientemente se ha utilizado el modelo TV en restauración de imágenes y también en SR como en Babacan et al. (2008b), Babacan et al. (2008c) y Babacan et al. (2011). Sin embargo, las reconstrucciones de las imágenes obtenidas usando el modelo TV realzan demasiado los bordes y suavizan en exceso las texturas de las imágenes.

Una alternativa al modelo TV es el basado en la norma ℓ_1 sobre los gradientes horizontales y verticales propuesto en Villena et al. (2009a), para distinguir el tratamiento aplicado a los bordes en una y otra dirección. Esta distribución a priori se ha utilizado también en el problema de restauración (ver Vega et al. (2009b)).

En este capítulo estudiaremos en detalle la SR de imágenes desplazadas y rotadas según el paradigma Bayesiano variacional, suponiendo conocidos los parámetros del registrado y usando, por un lado, el modelo a priori basado en la norma ℓ_1 propuesto en Villena et al. (2009a) y por otro, el modelo a priori SAR. Posteriormente comparamos los resultados obtenidos con los del modelo TV propuesto en Babacan et al. (2011).

3.2. Modelización Bayesiana Jerárquica

En esta sección vamos a ir describiendo todas las distribuciones necesarias en el paradigma Bayesiano Jerárquico, para modelar las incógnitas de nuestro problema de SR. En lo que resta de capítulo daremos por conocidos los parámetros del registrado $\{\mathbf{s}_k\}$, y para mayor comodidad no haremos referencia a estos parámetros en las listas de variables de las distribuciones.

3.2.1. Modelos a Priori para la Imagen de Alta Resolución

Como ya hemos mencionado anteriormente, consideraremos aquí dos modelos a priori, en primer término el modelo SAR, ya utilizado como comparación en anteriores trabajos Villena et al. (2009a), Villena et al. (2010a), Villena et al. (2010c), Villena et al. (2010b) y, en segundo término, el modelo basado en la norma ℓ_1 de los gradientes horizontal y vertical propuesto en

Villena et al. (2009a).

3.2.1.1. Modelo a Priori SAR

El modelo a priori SAR, para la imagen de AR $\mathbf{x}$, se define como

$$p_1(\mathbf{x}|\alpha_1) \propto \alpha_1^{\frac{PN}{2}} \exp \left\{ -\frac{\alpha_1}{2} \|\mathcal{C}\mathbf{x}\|^2 \right\}, \quad (3.1)$$

donde $\mathcal{C}$ representa el operador Laplaciano y α_1 es el parámetro de este modelo a priori. Hemos utilizado la notación con subíndices $p_1(\mathbf{x}|\alpha_1)$ para evitar confusiones con el otro modelo a priori a estudiar.

3.2.1.2. Modelo a Priori Basado en la Norma ℓ_1

Se propone la siguiente distribución de probabilidades como modelo a priori:

$$p_2(\mathbf{x}|\alpha_2) = \frac{1}{Z(\alpha_2)} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^{PN} \left[\alpha_2^h \|\Delta_i^h(\mathbf{x})\|_1 + \alpha_2^v \|\Delta_i^v(\mathbf{x})\|_1 \right] \right\}, \quad (3.2)$$

donde $\Delta_i^h(\mathbf{x})$ y $\Delta_i^v(\mathbf{x})$ representan el gradiente horizontal y vertical para el pixel i , $\alpha_2 = \{\alpha_2^h, \alpha_2^v\}$, siendo α_2^h y α_2^v los parámetros del modelo y $Z(\alpha_2)$ representa la función de partición que será aproximada como

$$Z(\alpha_2) \propto (\alpha_2^h \alpha_2^v)^{-\frac{PN}{4}}. \quad (3.3)$$

El modelo a priori definido por la Ec. (3.2) y propuesto en Villena et al. (2009a), utiliza diferentes parámetros para ponderar el gradiente en las direcciones horizontal y vertical. Esto le confiere una mejor adaptabilidad a las características de la imagen $\mathbf{x}$ a diferencia del modelo a priori TV, usado por ejemplo en Babacan et al. (2008b) y Babacan et al. (2011), que posee un sólo parámetro.

3.2.2. Modelo de Degradación

Partiremos en esta sección del modelo de degradación, descrito en la sección 2.3, para las observaciones de BR rotadas y desplazadas, y formulado en las Ecs. (2.1) y (2.2), que supone la presencia de ruido Gaussiano, como en la mayoría de los métodos de SR (como por ejemplo en Schultz y Stevenson (1992), Hardie et al. (1997), Lee y Kang (2003), He y Kondi (2006), Pickup et al. (2007), Chan et al. (2007) y Kanemura et al. (2009)). Así podemos modelar el proceso de observación mediante una distribución gaussiana de la forma:

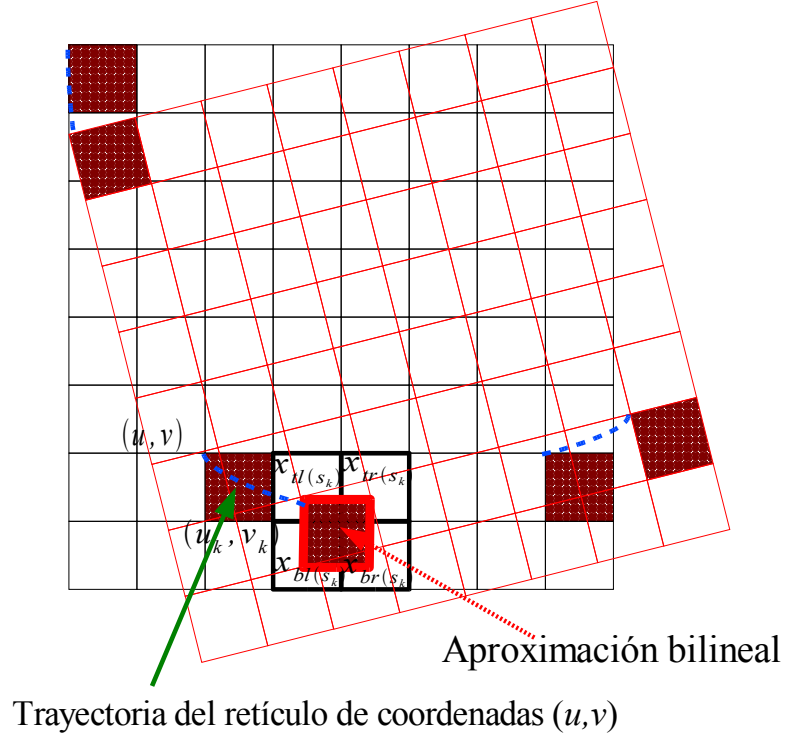


Figura 3.1: Movimiento entre los retículos de AR tomado de referencia, en negro, y los retículo correspondiente a la imagen k -ésima de AR en rojo. Aproximación bilineal para la celda (u_k, v_k) .

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}, \{\beta_k\}) \propto \beta_k^{\frac{NP}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \beta_k \|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k) \mathbf{x}\|^2 \right], \quad (3.4)$$

donde β_k representa la inversa de la varianza del ruido y $\mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k) = \mathbf{A} \mathbf{H}_k \mathbf{C}(\mathbf{s}_k)$ ha sido definida en la Ec. (2.2).

Si suponemos que las distintas observaciones de BR son estadísticamente independientes, la verosimilitud del conjunto de observaciones LR, vendría dada por la expresión

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \{\beta_k\}) = \prod_{k=1}^L p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}, \beta_k). \quad (3.5)$$

La figura 3.1 muestra una representación de los retículos cuadrangulares correspondientes a las imágenes de AR de referencia (en negro) y rotadas

y desplazadas k -ésima (en rojo). Cada pixel tiene una celda asociada en el retículo, en cuyo vértice superior izquierdo se ubica.

Describamos ahora, de forma explícita, la matriz $PN \times PN$ $\mathbf{C}(\mathbf{s}_k)$ de la Ec.(2.1), que aplicada a la imagen de AR $\mathbf{x}$, que suponemos centrada en el retículo de referencia, permitiría obtener la imagen de AR rotada y desplazada k -ésima. Denotemos como $(u, v)^t$ las coordenadas del retículo desplazado y rotado k -ésima, relacionadas mediante la expresión siguiente

$$\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma_k) & -\sin(\gamma_k) \\ \sin(\gamma_k) & \cos(\gamma_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_k \\ d_k \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

siendo $\mathbf{s}_k = (\gamma_k, c_k, d_k)^t$. Llamaremos $(\Delta u_k, \Delta v_k)^t$ a los desplazamientos entre los píxeles en una y otra imagen de AR

$$\begin{pmatrix} \Delta u_k \\ \Delta v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

Cuando la transformación geométrica definida por la Ec. (3.6) se aplica globalmente a la imagen discreta $\mathbf{x}$, la celda del retículo desplazado correspondiente al vértice $(u_k, v_k)^t$, cubrirá parcialmente varias celdas del retículo de referencia (véase la figura 3.1). Una vez aplicada esta transformación, no poseeremos observaciones en las nuevas posiciones de los píxeles, y tendremos que deducir sus valores de las observaciones del retículo de referencia, aplicando alguna aproximación. En esta memoria adoptaremos la aproximación bilineal como en Hardie et al. (1998), Tipping y Bishop (2003), Pickup et al. (2009) y que suele ser la que generalmente adoptan los métodos de SR. La aproximación bilineal utiliza las intensidades de los cuatro píxeles de la imagen de referencia más próximos a cada vértice del retículo transformado, en concreto, los remarcados en negro en la figura 3.1, situados arriba a la izquierda, arriba a la derecha, abajo a la izquierda y abajo a la derecha del pixel de coordenadas $(u_k, v_k)^t$ y que aparecen etiquetados por $x_{tl(\mathbf{s}_k)}$, $x_{tr(\mathbf{s}_k)}$, $x_{bl(\mathbf{s}_k)}$ y $x_{br(\mathbf{s}_k)}$, respectivamente.

Denotaremos el vector diferencia entre la posición del pixel en (u_k, v_k) y la del pixel de arriba a la derecha en el retículo de referencia por $(a_k(\mathbf{s}_k), b_k(\mathbf{s}_k))^t$, tal que

$$\begin{pmatrix} a_k(\mathbf{s}_k) \\ b_k(\mathbf{s}_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta u_k \\ \Delta v_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{floor}(\Delta u_k) \\ \text{ceil}(\Delta v_k) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Usando la interpolación bilineal, la imagen transformada $\mathbf{C}(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}$ puede aproximarse como (ver He et al. (2007) para más detalles)

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{s}_k)\mathbf{x} \approx & \mathbf{D}_{\mathbf{b}_k(\mathbf{s}_k)}(\mathbf{I} - \mathbf{D}_{\mathbf{a}_k(\mathbf{s}_k)})\mathbf{L}_{\mathbf{bl}(\mathbf{s}_k)}\mathbf{x} + \mathbf{D}_{\mathbf{b}_k(\mathbf{s}_k)}\mathbf{D}_{\mathbf{a}_k(\mathbf{s}_k)}\mathbf{L}_{\mathbf{br}(\mathbf{s}_k)}\mathbf{x} \\ & + (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{\mathbf{b}_k(\mathbf{s}_k)})(\mathbf{I} - \mathbf{D}_{\mathbf{a}_k(\mathbf{s}_k)})\mathbf{L}_{\mathbf{tl}(\mathbf{s}_k)}\mathbf{x} + (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{\mathbf{b}_k(\mathbf{s}_k)})\mathbf{D}_{\mathbf{a}_k(\mathbf{s}_k)}\mathbf{L}_{\mathbf{tr}(\mathbf{s}_k)}\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde $\mathbf{D}_{\mathbf{a}_k(\mathbf{s}_k)}$ y $\mathbf{D}_{\mathbf{b}_k(\mathbf{s}_k)}$ denotan matrices diagonales con los vectores $\mathbf{a}_k(\mathbf{s}_k)$ y $\mathbf{b}_k(\mathbf{s}_k)$ en su diagonal, respectivamente.

Las matrices $\mathbf{L}_{\mathbf{z}}$ con $\mathbf{z} \in \{\mathbf{tl}(s_k), \mathbf{tr}(s_k), \mathbf{bl}(s_k), \mathbf{br}(s_k)\}$ se construyen de forma que el producto $\mathbf{L}_{\mathbf{z}}\mathbf{x}$ obtiene los valores de los píxeles ubicados arriba a la izquierda, arriba a la derecha, abajo a la izquierda y abajo a la derecha de (u_k, v_k) , respectivamente.

3.2.3. Modelo de los Hiperparámetros

Tanto el modelo de imagen de la Ec. (3.2), o el de la Ec. (3.1), como el modelo de observación Ec. (3.4), poseen hiperparámetros. En el paradigma Bayesiano Jerárquico, los hiperparámetros se modelan mediante hiperpriors. Nosotros usaremos distribuciones Gamma, esto es, para los hiperparámetros $\theta \in \{\alpha_1, \alpha_2, \{\beta_k\}\}$

$$p(\theta) = \Gamma(\theta|a_\theta^0, b_\theta^0) = \frac{(b_\theta^0)^{a_\theta^0}}{\Gamma(a_\theta^0)} \theta^{a_\theta^0-1} \exp[-b_\theta^0 \theta], \quad (3.10)$$

donde $\theta > 0$, $b_\theta^0 > 0$ y $a_\theta^0 > 0$. La media de esta distribución es $E[\theta] = a_\theta^0/b_\theta^0$ y la varianza $\text{Var}[\theta] = a_\theta^0/(b_\theta^0)^2$.

3.2.4. Modelo Conjunto

Finalmente, combinando las Ecs. (3.1), (3.5) y (3.10) obtendremos, para el modelo SAR la siguiente distribución conjunta

$$p_1(\Theta_1, \mathbf{y}) = p_1(\mathbf{x}|\alpha_1)p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \{\beta_k\})p(\{\beta_k\})p(\alpha_1), \quad (3.11)$$

y para el modelo basado en la norma ℓ_1 , combinando las Ecs. (3.2), (3.5) y (3.10)

$$p_2(\Theta_2, \mathbf{y}) = p_2(\mathbf{x}|\alpha_2)p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \{\beta_k\})p(\{\beta_k\})p(\alpha_2). \quad (3.12)$$

donde $\Theta_l = \{\mathbf{x}, \{\beta_k\}, \alpha_l\}$, para $l = 1, 2$, representa al conjunto de las incógnitas para el modelo SAR y el modelo ℓ_1 respectivamente.

3.3. Inferencia Bayesiana Variacional

La inferencia Bayesiana se basa en la distribución a posteriori.

$$p(\Theta_l|\mathbf{y}) = \frac{p_l(\Theta_l, \mathbf{y})}{p(\mathbf{y})}, \text{ para } l = 1, 2. \quad (3.13)$$

Esta distribución no puede obtenerse de forma exacta, por la presencia de $p(\mathbf{y})$ en el denominador cuyo cálculo es intratable. Por ello hemos adoptado la

aproximación variacional, en la que nuestro problema consiste en aproximar la probabilidad a posteriori de la Ec. (3.13) mediante la distribución de probabilidad $q(\Theta_l)$ que minimice la divergencia de Kullback-Leibler (KL), de esta distribución respecto de la probabilidad a posteriori. Esta divergencia propuesta en Kullback y Leibler (1951) y Kullback (1959), se define como

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{KL}(q(\Theta_l)||p(\Theta_l|\mathbf{y})) &= \int q(\Theta_l) \log \left(\frac{q(\Theta_l)}{p(\Theta_l|\mathbf{y})} \right) d\Theta_l \\ &= \int q(\Theta_l) \log \left(\frac{q(\Theta_l)}{p_l(\Theta_l, \mathbf{y})} \right) d\Theta_l + Const \\ &= \mathcal{M}(q(\Theta_l), \mathbf{y}) + Const, \end{aligned} \quad (3.14)$$

es semidefinida positiva e igual cero sólo para $q(\Theta_l) = p(\Theta_l|\mathbf{y})$.

Generalmente se asume que la distribución $q(\Theta_l)$ puede factorizarse como en Bishop (2006) y Miskin (2000), resultando

$$q(\Theta_l) = q(\mathbf{x}, \alpha_l, \{\beta_k\}) = q(\alpha_l)q(\mathbf{x}) \prod_{k=1}^L q(\beta_k). \quad (3.15)$$

3.4. Inferencia Variacional para el Modelo a Priori SAR

En esta sección estudiaremos la inferencia variacional mediante la Ec. (3.14) para el modelo a priori SAR. Para este modelo el término $\mathcal{M}(q(\Theta_1), \mathbf{y})$ es integrable. En el algoritmo 3.1 se resume el algoritmo propuesto para obtener de forma iterativa las distribuciones correspondientes a la imagen de AR y a los hiperparámetros del modelo.

Para las distintas distribuciones de la Ec. (3.15) se obtienen expresiones del tipo siguiente

$$q(\xi) \propto \exp \left(\langle \log p_1(\Theta_1, \mathbf{y}) \rangle_{q(\Theta_{1\xi})} \right), \quad (3.16)$$

donde $\Theta_{1\xi}$ denota el conjunto Θ_1 pero sin el elemento ξ y $\langle \cdot \rangle_{q(\Theta_{1\xi})} = \mathbb{E}_{\Theta_{1\xi}}[\cdot]$ denota el valor esperado con respecto a la distribución $q(\Theta_{1\xi})$. En adelante omitiremos el subíndice referente a la distribución, para hacer más legible la notación, siempre que pueda deducirse fácilmente por el contexto de qué distribución se trata.

Aplicando la Ec. (3.16) se obtiene para $q(\mathbf{x})$

$$q(\mathbf{x}) \propto \exp \left(-\frac{\langle \alpha_1 \rangle}{2} \|\mathcal{C}\mathbf{x}\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \langle \beta_k \rangle \|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}\|^2 \right). \quad (3.17)$$

Algoritmo 3.1 SR utilizando el modelo SAR

Dada la estimaciones iniciales $q^1(\{\beta_k\}), q^1(\alpha_1)$.

para $j = 1, \dots$ hasta alcanzar el criterio de parada **hacer**

1. Encontrar

$$q^j(\mathbf{x}) = \underset{q(\mathbf{x})}{\operatorname{argmin}} \mathcal{M}(q^j(\{\beta_k\})q^j(\alpha_1)q(\mathbf{x}), \mathbf{y})$$

2. Encontrar

$$q^{j+1}(\alpha_1) = \underset{q(\alpha_1)}{\operatorname{argmin}} \mathcal{M}(q^j(\{\beta_k\})q(\alpha_1)q^j(\mathbf{x}), \mathbf{y})$$

3. Encontrar

$$q^{j+1}(\{\beta_k\}) = \underset{q(\{\beta_k\})}{\operatorname{argmin}} \mathcal{M}(q(\{\beta_k\})q^{j+1}(\alpha_1)q^j(\mathbf{x}), \mathbf{y})$$

fin para

Hacer $q(\Theta_1) = \lim_{j \rightarrow \infty} q^j(\Theta_1)$.

Esta es una distribución normal con la siguiente matriz de covarianza inversa

$$\operatorname{cov}_{q(\mathbf{x})}^{-1}[\mathbf{x}] = \sum_{k=1}^L \langle \beta_k \rangle \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)^t \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k) + \langle \alpha_1 \rangle \mathcal{C}^t \mathcal{C}. \quad (3.18)$$

El valor $E_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}]$ se obtiene resolviendo la ecuación

$$E_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}] = \operatorname{cov}_{q(\mathbf{x})}[\mathbf{x}] \sum_{k=1}^L \langle \beta_k \rangle \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)^t \mathbf{y}_k. \quad (3.19)$$

Para los hiperparámetros obtenemos las distribuciones siguientes:

$$q(\alpha_1) \propto \alpha_1^{\frac{PN}{2}-1+a_{\alpha_1}^o} \exp \left[-\alpha_1 \left(b_{\alpha_1}^0 + \frac{E_{\mathbf{x}}[\|\mathcal{C}\mathbf{x}\|^2]}{2} \right) \right], \quad (3.20)$$

$$q(\beta_k) \propto \beta_k^{\frac{N}{2}-1+a_{\beta_k}^o} \exp \left[-\beta_k \left(b_{\beta_k}^0 + \frac{E_{\mathbf{x}}[\|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}\|^2]}{2} \right) \right]. \quad (3.21)$$

Basándonos en estas distribuciones, podemos obtener los siguientes estimaciones puntuales para los hiperparámetros:

$$\langle \alpha_1 \rangle = \frac{PN + 2a_{\alpha_1}^0}{\|\mathcal{C}\mathbf{E}_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}]\|^2 + \text{traza}(\text{cov}_{\mathbf{q}(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]\mathcal{C}^t\mathcal{C}) + 2b_{\alpha_1}^0}, \quad (3.22)$$

y

$$\langle \beta_k \rangle = \frac{N + 2a_{\beta_k}^0}{\left(\|y_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{E}_x[\mathbf{x}]\|^2 + \text{traza}(\text{cov}_{\mathbf{q}(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]\mathbf{B}_k^t(\mathbf{s}_k)\mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k))\right) + 2b_{\beta_k}^0}. \quad (3.23)$$

3.5. Inferencia Variacional usando la Distribución a Priori ℓ_1

En este apartado describiremos la inferencia variacional utilizando la Ec. (3.14) para el modelo a priori basado en la norma ℓ_1 y que corresponde a cuando $l = 2$. En este caso, $\mathcal{M}(\mathbf{q}(\Theta_2), \mathbf{y})$ no puede calcularse por los términos no cuadráticos que aparecen en la integral. Para salvar este problema, se propone una mayorización del modelo a priori basado en la norma ℓ_1 , de forma análoga a como se hizo en Bioucas-Dias et al. (2006) y Babacan et al. (2011) para el modelo a priori TV. La citada mayorización se basa en la desigualdad

$$\sqrt{w} \leq \frac{w + z}{2\sqrt{z}}, \quad (3.24)$$

con $w \geq 0$ y $z > 0$.

Aplicando la desigualdad de la Ec. (3.24) en la Ec. (3.2), resulta

$$p_2(\mathbf{x}|\alpha_2^h, \alpha_2^v) \geq M(\alpha_2^h, \alpha_2^v, \mathbf{x}, \mathbf{w}^h, \mathbf{w}^v). \quad (3.25)$$

donde

$$M(\alpha_2^h, \alpha_2^v, \mathbf{x}, \mathbf{w}^h, \mathbf{w}^v) = (\alpha_2^h \alpha_2^v)^{\frac{PN}{4}} \times \exp \left\{ - \sum_{i=1}^{PN} \left[\alpha_2^h \frac{(\Delta_i^h(\mathbf{x}))^2 + w_i^h}{2\sqrt{w_i^h}} + \alpha_2^v \frac{(\Delta_i^v(\mathbf{x}))^2 + w_i^v}{2\sqrt{w_i^v}} \right] \right\}, \quad (3.26)$$

y los parámetros desconocidos $\mathbf{w}^h$ y $\mathbf{w}^v$, que también debemos estimar, son vectores PN -dimensionales $\mathbf{w}^h \in (R^+)^{PN}$ y $\mathbf{w}^v \in (R^+)^{PN}$, cuyas componentes denotamos por w_i^h y w_i^v respectivamente, para $i = 1, 2, \dots, PN$.

Usando la Ec. (3.25) encontramos una cota inferior a la distribución conjunta

$$\begin{aligned} p_2(\Theta_2, \mathbf{y}) &\geq p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \{\beta_k\})M(\alpha_2^h, \alpha_2^v, \mathbf{x}, \mathbf{w}^h, \mathbf{w}^v)p(\alpha_2^h)p(\alpha_2^v)\prod_{k=1}^L p(\beta_k) \\ &= \mathbf{F}(\Theta_2, \mathbf{y}, \mathbf{w}^h, \mathbf{w}^v), \end{aligned} \quad (3.27)$$

Introduciendo esta función en el integrando de la Ec. (3.14) obtenemos

$$\tilde{\mathcal{M}}(q(\Theta_2), \mathbf{y}, \mathbf{w}^h, \mathbf{w}^v) = \int q(\Theta_2) \log \left(\frac{q(\Theta_2)}{\mathbf{F}(\Theta_2, \mathbf{y}, \mathbf{w}^h, \mathbf{w}^v)} \right) d\Theta_2, \quad (3.28)$$

que cumple la siguiente desigualdad

$$\mathcal{M}(q(\Theta_2), \mathbf{y}) \leq \min_{\{\mathbf{w}^h, \mathbf{w}^v\}} \tilde{\mathcal{M}}(q(\Theta_2), \mathbf{y}, \mathbf{w}^h, \mathbf{w}^v). \quad (3.29)$$

Así hemos encontrado una cota superior a la distancia de KL de la Ec. (3.14), de la forma

$$\mathcal{C}_{KL}(q(\Theta_2)||p(\Theta_2, \mathbf{y})) \leq \mathcal{C}_{KL}(q(\Theta_2)||\mathbf{F}(\Theta_2, \mathbf{y}, \mathbf{w}^h, \mathbf{w}^v)). \quad (3.30)$$

La minimización de la Ec. (3.14) se puede reemplazar por la de su cota superior Ec. (3.30), ya que la minimización de esta cota con respecto a las incógnitas y también respecto a las variables auxiliares $\mathbf{w}^h$ y $\mathbf{w}^v$ de forma alternativa en cada iteración, ajusta cada vez más la cota y su minimización debe decrecer el valor de $\mathcal{C}_{KL}(q(\Theta_2)||p(\Theta_2, \mathbf{y}))$.

El algoritmo propuesto para estimar variacionalmente la imagen de AR y los hiperparámetros, lo resumimos en el algoritmo iterativo 3.2.

La cota superior de la Ec. (3.30) es cuadrática y esto permite encontrar analíticamente la distribución que la minimiza. Obtenemos para las distintas distribuciones sobre las incógnitas $q(\xi)$ con $\xi \in \Theta_2$ la siguiente expresión

$$q(\xi) \propto \exp \left(\left\langle \log \mathbf{F}(\Theta_2, \mathbf{y}, \mathbf{w}^h, \mathbf{w}^v) \right\rangle_{q(\Theta_{2\xi})} \right), \quad (3.31)$$

donde $\Theta_{2\xi}$ denota el conjunto Θ_2 pero sin el elemento ξ y $\langle \cdot \rangle_{q(\Theta_{2\xi})} = \mathbb{E}_{\Theta_{2\xi}}[\cdot]$ denota el valor esperado con respecto a la distribución $q(\Theta_{2\xi})$.

En base a la Ec. (3.31) obtenemos de forma explícita las soluciones para las distribuciones de las distintas incógnitas.

3.5.1. Estimación de la Imagen de AR

De la Ec. (3.31) obtenemos para $q(\mathbf{x})$ la siguiente distribución normal

$$q(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}|\mathbb{E}_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}], \text{cov}_{q(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]), \quad (3.32)$$

Algoritmo 3.2 SR utilizando la norma ℓ_1

Dadas las estimaciones iniciales $q^1(\{\beta_k\})$, $q^1(\alpha^h)$, $q^1(\alpha^v)$ y $\mathbf{w}^{h1}, \mathbf{w}^{v1} \in (R^+)^{PN}$.

para $j = 1, \dots$ hasta alcanzar el criterio de parada **hacer**

1. Encontrar

$$q^j(\mathbf{x}) = \underset{q(\mathbf{x})}{\operatorname{argmin}} \tilde{\mathcal{M}}(q^j(\{\beta_k\})q^j(\alpha_2)q(\mathbf{x}), \mathbf{y}, \mathbf{w}^{hj}, \mathbf{w}^{vj})$$

2. Encontrar

$$\{\mathbf{w}^{hj+1}, \mathbf{w}^{vj+1}\} = \underset{\{\mathbf{w}^h, \mathbf{w}^v\}}{\operatorname{argmin}} \tilde{\mathcal{M}}(q^j(\{\beta_k\})q^j(\alpha_2)q^j(\mathbf{x}), \mathbf{y}, \mathbf{w}^h, \mathbf{w}^v)$$

3. Encontrar

$$q^{j+1}(\alpha_2) = \underset{q(\alpha_2)}{\operatorname{argmin}} \tilde{\mathcal{M}}(q^j(\{\beta_k\})q(\alpha_2)q^j(\mathbf{x}), \mathbf{y}, \mathbf{w}^{hj+1}, \mathbf{w}^{vj+1})$$

4. Encontrar

$$q^{j+1}(\{\beta_k\}) = \underset{q(\{\beta_k\})}{\operatorname{argmin}} \tilde{\mathcal{M}}(q(\{\beta_k\})q^{j+1}(\alpha_2)q^j(\mathbf{x}), \mathbf{y}, \mathbf{w}^{hj+1}, \mathbf{w}^{vj+1})$$

fin para

Hacer $q(\Theta_2) = \lim_{j \rightarrow \infty} q^j(\mathbf{x})q^j(\{\beta_k\})q^j(\alpha^h)q^j(\alpha^v)$.

con

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}_{q(\mathbf{x})}^{-1}[\mathbf{x}] &= \sum_{k=1}^L \langle \beta_k \rangle \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)^t \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k) \\ &+ \langle \alpha_2^h \rangle \Delta^h{}^t \mathbf{W}(\mathbf{w}^h) \Delta^h \\ &+ \langle \alpha_2^v \rangle \Delta^v{}^t \mathbf{W}(\mathbf{w}^v) \Delta^v \end{aligned} \quad (3.33)$$

y $E_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}]$ se obtiene resolviendo la ecuación

$$E_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}] = \operatorname{cov}_{q(\mathbf{x})}[\mathbf{x}] \sum_{k=1}^L \langle \beta_k \rangle \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)^t \mathbf{y}_k. \quad (3.34)$$

En la Ec. (3.33) Δ^h y Δ^v representan las matrices de convolución de $PN \times PN$ asociadas respectivamente con las diferencias en horizontal y en vertical de primer orden, y $\mathbf{W}(\mathbf{w}) \forall \mathbf{w} \in (R^+)^{PN}$ es una matriz diagonal de $PN \times PN$ con elementos

$$\mathbf{W}(\mathbf{w})_{ii} = \frac{1}{\sqrt{w_i}} \text{ para } i = 1, \dots, PN. \quad (3.35)$$

Las matrices $\mathbf{W}(\mathbf{w}^h)$ y $\mathbf{W}(\mathbf{w}^v)$ se puede interpretar como matrices de adaptación espacial del suavizado horizontal y vertical, a las intensidades locales de los gradientes horizontal y vertical.

Los parámetros $\mathbf{w}^h$ y $\mathbf{w}^v$ se obtienen de la expresión

$$\{\mathbf{w}^h, \mathbf{w}^v\} = \underset{\{\mathbf{w}^h, \mathbf{w}^v\}}{\operatorname{argmin}} \tilde{\mathcal{M}}(q(\{\theta_k\}), q(\mathbf{x}), \mathbf{y}, \mathbf{w}^h, \mathbf{w}^v), \quad (3.36)$$

de la que se deducen los siguientes valores para $\mathbf{w}^h$ y $\mathbf{w}^v$

$$\mathbf{w}^h = \underset{\mathbf{w}^h}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{PN} \frac{E_{\mathbf{x}}[(\Delta_i^h(\mathbf{x}))^2] + w_i^h}{\sqrt{w_i^h}}, \quad (3.37)$$

y

$$\mathbf{w}^v = \underset{\mathbf{w}^v}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{PN} \frac{E_{\mathbf{x}}[(\Delta_i^v(\mathbf{x}))^2] + w_i^v}{\sqrt{w_i^v}}, \quad (3.38)$$

y por consiguiente

$$w_i^h = E_{\mathbf{x}}[(\Delta_i^h(\mathbf{x}))^2] = (\Delta_i^h(E_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}]))^2 + \operatorname{traza}(\operatorname{cov}_{q(\mathbf{x})}[\mathbf{x}] \Delta_i^{ht} \delta_i \Delta_i^h) \quad (3.39)$$

y

$$w_i^v = E_{\mathbf{x}}[(\Delta_i^v(\mathbf{x}))^2] = (\Delta_i^v(E_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}]))^2 + \operatorname{traza}(\operatorname{cov}_{q(\mathbf{x})}[\mathbf{x}] \Delta_i^{vt} \delta_i \Delta_i^v) \quad (3.40)$$

donde δ_i representa una matriz con todos los elementos cero salvo el elemento en la posición (i, i) que valdría uno.

3.5.2. Estimación de los Hiperparámetros

Por último obtendremos las distribuciones de los hiperparámetros α_2^h, α_2^v y $\{\beta_k\}$. A partir de la Ec. (3.31) encontramos para los hiperparámetros las siguientes distribuciones Gamma

$$q(\alpha_2^h) \propto (\alpha_2^h)^{\frac{PN}{4}-1+a_{\alpha_2^h}^0} \exp \left[-\alpha_2^h \left(b_{\alpha_2^h}^0 + \sum_{i=1}^{PN} \sqrt{w_i^h} \right) \right], \quad (3.41)$$

$$q(\alpha_2^v) \propto (\alpha_2^v)^{\frac{PN}{4}-1+a_{\alpha_2^v}^0} \exp \left[-\alpha_2^v \left(b_{\alpha_2^v}^0 + \sum_{i=1}^{PN} \sqrt{w_i^v} \right) \right], \quad (3.42)$$

y

$$q(\beta_k) \propto \beta_k^{\frac{N}{2}-1+a_{\beta_k}^0} \exp \left[-\beta_k \left(b_{\beta_k}^0 + \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{x}} [\|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}\|^2]}{2} \right) \right]. \quad (3.43)$$

Por tanto, obtenemos para los hiperparámetros los siguientes estimadores puntuales

$$\langle \alpha_2^h \rangle = \frac{\frac{PN}{4} + a_{\alpha_2^h}^0}{\sum_{i=1}^{PN} \sqrt{w_i^h} + b_{\alpha_2^h}^0}, \quad (3.44)$$

$$\langle \alpha_2^v \rangle = \frac{\frac{PN}{4} + a_{\alpha_2^v}^0}{\sum_{i=1}^{PN} \sqrt{w_i^v} + b_{\alpha_2^v}^0}, \quad (3.45)$$

y

$$\langle \beta_k \rangle = \frac{N + 2a_{\beta_k}^0}{\left(\|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbb{E}_x[\mathbf{x}]\|^2 + \text{traza}(\text{cov}_{q(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]\mathbf{B}_k^t(\mathbf{s}_k)\mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)) \right) + 2b_{\beta_k}^0}. \quad (3.46)$$

Una forma más significativa de expresar las citadas medias seria de la forma

$$\frac{1}{\langle \alpha_2^h \rangle} = \gamma_{\alpha^h} \frac{1}{\alpha_0^h} + (1 - \gamma_{\alpha^h}) \frac{\sum_{i=1}^{PN} \sqrt{w_i^{hj+1}}}{PN}, \quad (3.47)$$

$$\frac{1}{\langle \alpha_2^v \rangle} = \gamma_{\alpha^v} \frac{1}{\alpha_0^v} + (1 - \gamma_{\alpha^v}) \frac{\sum_{i=1}^{PN} \sqrt{w_i^{vj+1}}}{PN}, \quad (3.48)$$

y

$$\frac{1}{\langle \beta_k \rangle} = \gamma_{\beta_k} \frac{1}{\beta_k^0} + (1 - \gamma_{\beta_k}) \frac{\mathbb{E}_x[\mathbf{x}] \left[\sum_{k=1}^L \|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}\|^2 \right]}{N} \quad (3.49)$$

donde

$$\gamma_{\alpha^h} = \frac{a_{\alpha^h}^0}{PN + a_{\alpha^h}^0}, \quad (3.50)$$

$$\gamma_{\alpha^v} = \frac{a_{\alpha^v}^0}{PN + a_{\alpha^v}^0}, \quad (3.51)$$

y

$$\gamma_{\beta_k} = \frac{a_{\beta_k}^0}{\frac{N}{2} + a_{\beta_k}^0}, \quad (3.52)$$

Estos valores medios son combinaciones lineales convexas de las inversas de las medias de los hiperprior $\alpha_0^h = \frac{a_0^h}{b_0^h}$, $\alpha_0^v = \frac{a_0^v}{b_0^v}$ y $\beta_k^0 = \frac{a_{\beta_k}^0}{b_{\beta_k}^0}$ y de sus correspondientes estimaciones de máxima verosimilitud. Los parámetros γ_{α^h} , γ_{α^v} y γ_{β_k} pueden tomar valores en el intervalo semicerrado $[0, 1)$ y pueden ser interpretados como la confianza en los valores de los hiperparámetros estimados.

3.6. Aproximación Circulante

Para la estimación de las distintas incógnitas debemos resolver las Ecs. (3.34), (3.39), (3.40), (3.23) y (3.22). Como se puede ver en el apéndice A, no podemos pretender, resolver estas ecuaciones de forma directa, obteniendo la matriz de covarianza $\text{cov}_{q(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]$ definida en la Ec. (3.33). Si se tratara sólo de estimar la imagen de AR, bastaría con utilizar un método iterativo de resolución de ecuaciones lineales, pero en nuestro caso, la estimación de los hiperparámetros nos obliga a calcular trazas del producto de la covarianza por otras matrices.

Así pues, utilizaremos el método del gradiente conjugado para la resolución de la Ec. (3.34) y la aproximación circulante de inversión de matrices para la estimación de los hiperparámetros. La aproximación circulante para la inversión de matrices es estudiada en la sección A.2, y básicamente consiste en transformar la matriz objeto de inversión en otra matriz que sea circulante por bloques y pueda ser invertida de forma exacta la aproximación en el dominio de Fourier.

En nuestro caso, necesitamos encontrar aproximaciones circulantes a la matriz $\mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)$ y también a las matrices $\mathbf{W}(\mathbf{w}^h)$ y $\mathbf{W}(\mathbf{w}^v)$ de la Ec. (3.33). Aproximaremos $\mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k) = \mathbf{A}\mathbf{H}_k\mathbf{C}(\mathbf{s}_k)$ por la matriz circulante

$$\bar{\mathbf{B}}_k = \mathbf{A}\mathbf{H}_k\bar{\mathbf{C}}_k(\mathbf{s}_k), \quad (3.53)$$

donde $\bar{\mathbf{C}}_k(\mathbf{s}_k)$ es una matriz circulante por bloques con bloques circulantes cuya primera columna se define como

$$\bar{\mathbf{C}}_k(\mathbf{s}_k)_{i,1} = \frac{1}{PN} \sum_{l=1}^{PN} \mathbf{C}_k(\mathbf{s}_k)_{[(l+i-1) \bmod (PN)],l} \text{ para } i = 1, \dots, PN. \quad (3.54)$$

Aproximaremos las matrices $\mathbf{W}(\mathbf{w}^h)$ y $\mathbf{W}(\mathbf{w}^v)$ por su media, esto es

$$z(\mathbf{w}^h) = \frac{1}{PN} \sum_{i=1}^{PN} \left(\frac{1}{\sqrt{w_i^h}} \right), \quad (3.55)$$

$$z(\mathbf{w}^v) = \frac{1}{PN} \sum_{i=1}^{PN} \left(\frac{1}{\sqrt{w_i^v}} \right) \quad (3.56)$$

Utilizando las Ecs. (3.53), (3.56) y (3.56) encontramos una aproximación circulante por bloques circulantes a la inversa de la covarianza

$$\begin{aligned} \text{cov}_{q(\mathbf{x})}^{-1}[\mathbf{x}] \approx \mathbf{O}_2 &= \sum_{k=1}^L \langle \beta_k \rangle \bar{\mathbf{B}}_k^t \bar{\mathbf{B}}_k \\ &+ \langle \alpha_2^h \rangle z(\mathbf{w}^h) \Delta^{h^t} \Delta^h \\ &+ \langle \alpha_2^v \rangle z(\mathbf{w}^v) \Delta^{v^t} \Delta^v. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Aplicando la Ec. (3.57) en las Ecs. (3.39) y (3.40) obtenemos su correspondientes aproximaciones:

$$w_i^h \approx (\Delta_i^h(\mathbf{E}_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}]))^2 + \frac{1}{PN} \text{traza}(\mathbf{O}_2^{-1} \Delta^{h^t} \Delta^h), \quad (3.58)$$

$$w_i^v \approx (\Delta_i^v(\mathbf{E}_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}]))^2 + \frac{1}{PN} \text{traza}(\mathbf{O}_2^{-1} \Delta^{v^t} \Delta^v). \quad (3.59)$$

De modo similar, aplicando la Ec. (3.53) en las Ecs. (3.18) y (3.22) resultarían

$$\text{cov}_{q(\mathbf{x})}^{-1}[\mathbf{x}] \approx \mathbf{O}_1 = \sum_{k=1}^L \langle \beta_k \rangle \bar{\mathbf{B}}_k^t \bar{\mathbf{B}}_k + \langle \alpha_1 \rangle \mathcal{C}^t \mathcal{C}, \quad (3.60)$$

y

$$\langle \alpha_1 \rangle_{q(\alpha_1)} \approx \frac{PN + 2a_{\alpha_1}^0}{\|\mathcal{C}\mathbf{E}_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}]\|^2 + \text{traza}(\mathbf{O}_1^{-1} \mathcal{C}^t \mathcal{C}) + 2b_{\alpha_1}^0}. \quad (3.61)$$

Por último, aplicando las Ecs. (3.57) y (3.60) en la Ec. (3.23), resulta

$$\langle \beta_k \rangle_{q(\beta_k)} \approx \frac{\frac{N}{2} + a_{\beta_k}^0}{\frac{1}{2} \left(\|y_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k) \mathbf{E}_x[\mathbf{x}]\|^2 + \text{traza}(\mathbf{O}_l^{-1} \bar{\mathbf{B}}_k^t \bar{\mathbf{B}}_k) \right) + b_{\beta_k}^0}. \quad (3.62)$$

3.7. Experimentos

Se han realizado numerosos experimentos para evaluar el comportamiento del algoritmo 3.2 propuesto, comparado con la interpolación bicúbica, con el algoritmo 3.1 y con el método de SR propuesto en Babacan (2009), Babacan et al. (2011) donde se usa el modelo a priori TV.

Para ello, hemos utilizado un conjunto de ocho imágenes de igual tamaño (120×120 píxeles) y de diversas características, ver la figura 3.2. Con estas imágenes se han realizado experimentos con 2 y 5 observaciones con factor de magnificación $\sqrt{P} = 2$ y con 11 observaciones con factor de magnificación $\sqrt{P} = 4$. Cada experimento ha sido repetido 10 veces para mostrar la robustez de los métodos de SR al ruido. Para cada una de las imágenes seleccionadas se ha simulado el proceso de observación de una secuencia de imágenes desplazadas y rotadas, emborronadas con una PSF uniforme de tamaño 3 cuando el factor de magnificación es $\sqrt{P} = 2$, y de tamaño 5 cuando el factor es $\sqrt{P} = 4$. En la simulación del proceso de observación con dos observaciones se ha utilizado los vectores de movimiento $\mathbf{s}_1 = (0.0, 0.0, 0.0)^t$ y $\mathbf{s}_2 = (3.0, 0.0, 0.5)^t$, con cinco observaciones se han usado los vectores de movimiento anteriores y en la misma línea además los vectores $\mathbf{s}_3 = (-3.0, 0.5, 0)^t$, $\mathbf{s}_4 = (5.0, 1.0, 0.0)^t$ y $\mathbf{s}_5 = (-5.0, 0.0, 1.0)^t$ y con once observaciones se han utilizado los vectores de movimiento anteriores junto con los vectores $\mathbf{s}_6 = (3.5, 2.5, 0.1)^t$, $\mathbf{s}_7 = (6.2, -1.2, 1.9)^t$, $\mathbf{s}_8 = (2.6, 0.6, 0.8)^t$, $\mathbf{s}_9 = (-4.5, 0.8, 2.1)^t$, $\mathbf{s}_{10} = (-3.4, 2.5, -0.1)^t$ y $\mathbf{s}_{11} = (-1.3, 1.7, -3.8)^t$, siendo $\mathbf{s}_k = (\gamma_k, c_k, d_k)$. Posteriormente se les ha añadido ruido Gaussiano con relaciones señal ruido (SNR) de 10db, 15db, 20db, 25db, 30db y 40db para cada secuencia de observaciones generadas.

Para medir la calidad de las reconstrucciones de SR se ha utilizado el pico de la relación señal ruido (PSNR) definido como:

$$PSNR = 10 \log_{10} \left(\frac{(PN)^2}{\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{true}\|^2} \right), \quad (3.63)$$

donde $\hat{\mathbf{x}}$ representa la imagen de AR estimada y $\mathbf{x}_{true}$ es la imagen verdadera conocida. Ambas, $\hat{\mathbf{x}}$ y $\mathbf{x}_{true}$ han sido normalizadas en el intervalo $[0, 1]$.

Para la parada de los algoritmos hemos adoptado el criterio:

$$\frac{\|\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^{j-1}\|^2}{\|\mathbf{x}^{j-1}\|^2} < 10^{-5}, \quad (3.64)$$

donde $\mathbf{x}^j$ y $\mathbf{x}^{j-1}$ representan la imagen de AR estimada en la iteración j y en la anterior ($j - 1$).

Los resultados de las reconstrucciones de AR para el experimento con dos observaciones utilizando: el método propuesto (norma ℓ_1), el método propuesto en Babacan et al. (2011) (TV), el método definido por el algoritmo

3.1 y la interpolación bicúbica (BBC) se muestran en las tablas 3.1 y 3.2 para los distintos niveles de ruido.

En las tablas 3.3 y 3.4 se muestran las PSNR medias de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con cinco observaciones.

En las figuras 3.3, 3.4 y 3.5 se muestran ejemplos de secuencias de 2, 5 y 11 observaciones generadas para las imágenes de las figuras 3.2(a), 3.2(d) y 3.2(h) con factores de magnificación 2, 2 y 4 y ruido Gaussiano de 10db, 15db y 30db, respectivamente.

La figura 3.6 muestra las reconstrucciones de AR obtenidas por los distintos métodos de SR a partir de las observaciones mostradas en la figura 3.3, obtenidas a partir de la imagen de la figura 3.2(a), y la figura 3.7 muestra las diferencias absolutas entre la reconstrucciones AR y la imagen original de la figura 3.2(a). Para facilitar la comparación de las calidades de las distintas reconstrucciones de AR se han representado las diferencias absolutas en escala de color, donde el color azul oscuro representa diferencias próximas a cero y los colores rojizos pasando por los amarillos diferencias elevadas. De igual modo las figuras 3.8, 3.9 y 3.10, 3.11 muestran las reconstrucciones de AR a partir de las observaciones de las figuras 3.4 y 3.5 y las diferencias absolutas entre las reconstrucciones y las correspondientes imágenes originales de las figuras 3.2(d) y 3.2(h), respectivamente.

Puede observarse como el modelo a priori TV resalta en exceso los bordes mientras que el modelo a priori basado en la norma ℓ_1 lo hace en menor grado que el TV y permite obtener mejores reconstrucciones.

Por último las tablas 3.5 y 3.6 muestran los valores medios del PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el caso de usar 11 observaciones y factor de magnificación $\sqrt{P} = 4$.

Analizando las tablas anteriores, podemos observar cómo la calidad de las imágenes de AR obtenidas con los diversos métodos depende del número y de los niveles de ruido de las observaciones. Así, para un número reducido de observaciones observamos cómo el método de SR basado en el modelo TV resulta mejor que el método basado en el modelo SAR y muy similar al método basado en la norma ℓ_1 . Sin embargo, cuando el número de observaciones es 5 o 11 las reconstrucciones obtenidas aplicando el método propuesto se comportan mejor, por lo general, que el resto de los métodos como se muestra en las tablas, 3.3, 3.4 3.5 y 3.6. Por ejemplo, en la figura 3.12 se muestra como evoluciona la calidad de las imágenes reconstruidas de AR utilizando los algoritmos propuestos en Babacan et al. (2011), 3.2 y 3.1 para diversos números de observaciones generadas a partir de la imagen de la figura 3.2(c) con factor de magnificación 2 y ruido Gaussiano de 10db.

3.8. Conclusiones

En este capítulo hemos presentado un nuevo método de SR Bayesiano variacional que utiliza un modelo a priori basado en la norma ℓ_1 de los gradientes horizontal y vertical que propusimos en Villena et al. (2009a). El método propuesto se ha comparado favorablemente con otros métodos de SR variacional, como el basado en el modelo a priori TV descrito en Babacan et al. (2011). Para la comparación se ha utilizado una amplia gama de imágenes de diversos tipos.

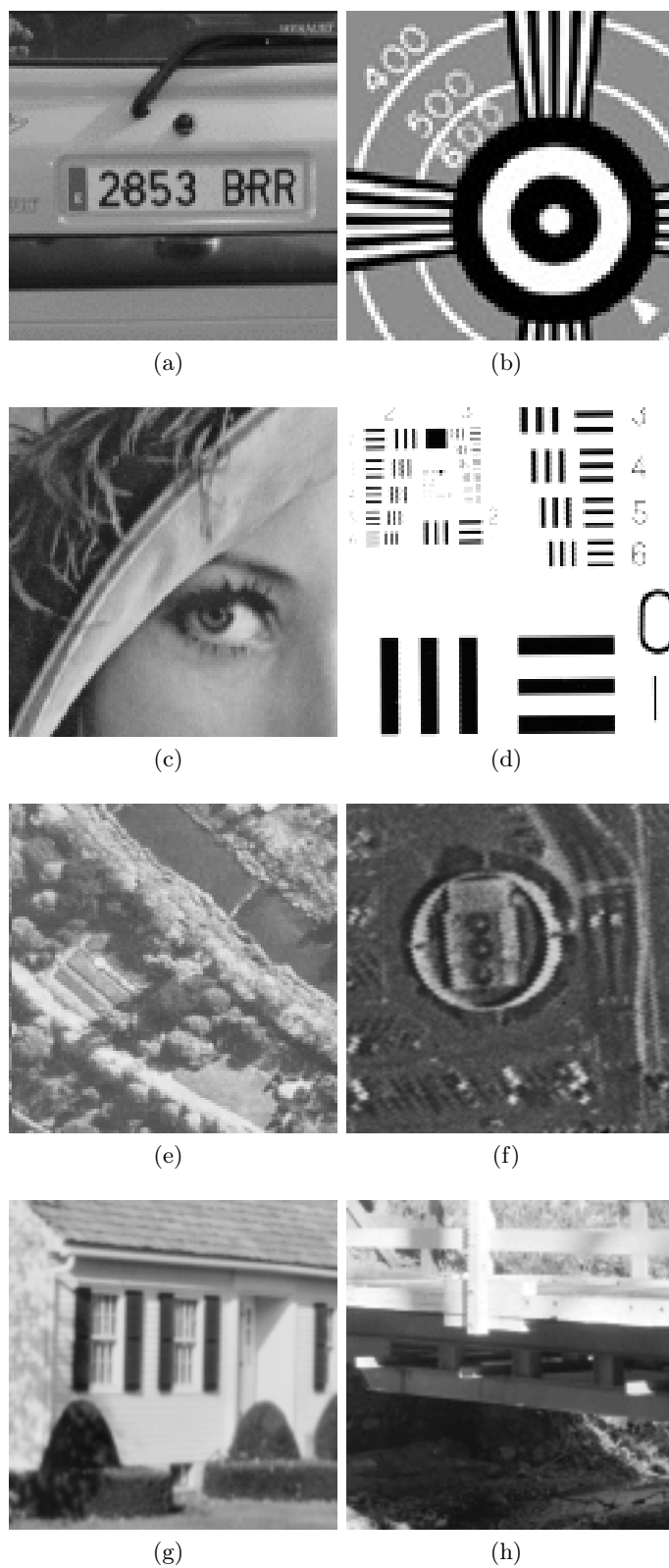


Figura 3.2: Conjunto de 8 imágenes de 120×120 píxeles seleccionadas para los experimentos.

Tabla 3.1: Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 2 observaciones para los niveles de ruido entre 10db y 20db.

Imagen $\mathbf{x}$	Método	SNR 10db	SNR 15db	SNR 20db
a 	BBC	$23.03 \pm 6.2\text{e-}03$	$23.04 \pm 1.3\text{e-}03$	$23.04 \pm 2.3\text{e-}04$
	SAR	$27.94 \pm 2.8\text{e-}02$	$29.29 \pm 1.8\text{e-}02$	$29.64 \pm 6.4\text{e-}03$
	TV	$28.53 \pm 2.7\text{e-}02$	$30.30 \pm 3.4\text{e-}02$	$31.12 \pm 1.6\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$28.83 \pm 3.5\text{e-}02$	$30.13 \pm 2.6\text{e-}02$	$30.45 \pm 1.3\text{e-}02$
b 	BBC	$16.37 \pm 4.5\text{e-}03$	$16.38 \pm 1.9\text{e-}03$	$16.38 \pm 4.5\text{e-}04$
	SAR	$24.74 \pm 3.1\text{e-}02$	$25.62 \pm 2.4\text{e-}02$	$25.72 \pm 2.5\text{e-}03$
	TV	$25.24 \pm 3.2\text{e-}02$	$27.21 \pm 3.2\text{e-}02$	$27.98 \pm 1.5\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$25.44 \pm 2.9\text{e-}02$	$26.64 \pm 2.7\text{e-}02$	$26.89 \pm 5.0\text{e-}03$
c 	BBC	$24.72 \pm 9.3\text{e-}03$	$24.74 \pm 2.2\text{e-}03$	$24.74 \pm 5.3\text{e-}04$
	SAR	$30.56 \pm 4.0\text{e-}02$	$32.43 \pm 1.9\text{e-}02$	$33.16 \pm 7.9\text{e-}03$
	TV	$31.63 \pm 3.1\text{e-}02$	$33.37 \pm 1.7\text{e-}02$	$34.43 \pm 1.7\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$31.81 \pm 2.6\text{e-}02$	$33.54 \pm 1.6\text{e-}02$	$34.15 \pm 1.2\text{e-}02$
d 	BBC	$16.44 \pm 3.2\text{e-}03$	$16.45 \pm 8.0\text{e-}04$	$16.45 \pm 4.5\text{e-}04$
	SAR	$21.18 \pm 3.4\text{e-}02$	$21.87 \pm 7.9\text{e-}03$	$21.95 \pm 2.9\text{e-}03$
	TV	$21.70 \pm 4.7\text{e-}02$	$23.14 \pm 1.7\text{e-}02$	$23.55 \pm 6.2\text{e-}03$
	norma ℓ_1	$22.14 \pm 3.2\text{e-}02$	$22.93 \pm 1.2\text{e-}02$	$23.08 \pm 4.7\text{e-}03$
e 	BBC	$25.33 \pm 3.0\text{e-}03$	$25.33 \pm 1.0\text{e-}03$	$25.33 \pm 3.0\text{e-}04$
	SAR	$30.66 \pm 3.2\text{e-}02$	$31.56 \pm 1.2\text{e-}02$	$31.71 \pm 2.1\text{e-}03$
	TV	$30.83 \pm 3.0\text{e-}02$	$31.93 \pm 1.3\text{e-}02$	$32.17 \pm 2.2\text{e-}03$
	norma ℓ_1	$30.85 \pm 2.6\text{e-}02$	$31.60 \pm 1.2\text{e-}02$	$31.78 \pm 2.2\text{e-}03$
f 	BBC	$24.45 \pm 3.0\text{e-}03$	$24.45 \pm 9.8\text{e-}04$	$24.45 \pm 1.7\text{e-}04$
	SAR	$30.13 \pm 1.9\text{e-}02$	$30.64 \pm 5.8\text{e-}03$	$30.71 \pm 1.7\text{e-}03$
	TV	$30.64 \pm 2.5\text{e-}02$	$31.42 \pm 9.8\text{e-}03$	$31.56 \pm 2.1\text{e-}03$
	norma ℓ_1	$30.54 \pm 1.6\text{e-}02$	$30.96 \pm 7.1\text{e-}03$	$31.02 \pm 2.2\text{e-}03$
g 	BBC	$24.53 \pm 5.7\text{e-}03$	$24.55 \pm 2.6\text{e-}03$	$24.55 \pm 6.4\text{e-}04$
	SAR	$30.63 \pm 3.3\text{e-}02$	$32.75 \pm 2.2\text{e-}02$	$33.62 \pm 7.9\text{e-}03$
	TV	$31.33 \pm 3.2\text{e-}02$	$33.22 \pm 2.5\text{e-}02$	$34.40 \pm 1.4\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$31.83 \pm 2.8\text{e-}02$	$33.56 \pm 1.4\text{e-}02$	$34.16 \pm 1.3\text{e-}02$
h 	BBC	$25.02 \pm 1.4\text{e-}02$	$25.07 \pm 4.2\text{e-}03$	$25.08 \pm 9.6\text{e-}04$
	SAR	$27.79 \pm 4.9\text{e-}02$	$30.00 \pm 2.2\text{e-}02$	$30.95 \pm 1.3\text{e-}02$
	TV	$29.83 \pm 4.6\text{e-}02$	$31.45 \pm 1.7\text{e-}02$	$32.78 \pm 3.0\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$30.38 \pm 2.5\text{e-}02$	$31.89 \pm 1.0\text{e-}02$	$32.63 \pm 1.1\text{e-}02$

Tabla 3.2: Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 2 observaciones para los niveles de ruido entre 25db y 40db.

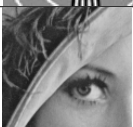
Imagen $\mathbf{x}$	Método	SNR 25db	SNR 30db	SNR 40db
a 	BBC	$23.04 \pm 1.6\text{e-}04$	$23.04 \pm 6.0\text{e-}05$	$23.04 \pm 7.0\text{e-}06$
	SAR	$29.68 \pm 1.7\text{e-}03$	$29.68 \pm 5.0\text{e-}04$	$29.68 \pm 1.0\text{e-}03$
	TV	$31.24 \pm 5.1\text{e-}03$	$31.26 \pm 3.0\text{e-}03$	$31.27 \pm 1.1\text{e-}03$
	norma ℓ_1	$30.48 \pm 2.6\text{e-}03$	$30.49 \pm 1.2\text{e-}03$	$30.52 \pm 1.5\text{e-}03$
b 	BBC	$16.38 \pm 1.3\text{e-}04$	$16.38 \pm 4.6\text{e-}05$	$16.38 \pm 2.9\text{e-}06$
	SAR	$25.73 \pm 1.3\text{e-}03$	$25.73 \pm 4.6\text{e-}04$	$25.73 \pm 6.3\text{e-}05$
	TV	$28.08 \pm 4.3\text{e-}03$	$28.09 \pm 1.6\text{e-}03$	$28.09 \pm 1.4\text{e-}04$
	norma ℓ_1	$26.92 \pm 2.4\text{e-}03$	$26.93 \pm 9.9\text{e-}04$	$26.94 \pm 3.9\text{e-}04$
c 	BBC	$24.74 \pm 3.0\text{e-}04$	$24.74 \pm 6.6\text{e-}05$	$24.74 \pm 5.6\text{e-}06$
	SAR	$33.26 \pm 1.9\text{e-}03$	$33.27 \pm 5.0\text{e-}04$	$33.27 \pm 9.9\text{e-}05$
	TV	$34.71 \pm 2.5\text{e-}03$	$34.74 \pm 8.8\text{e-}04$	$34.74 \pm 3.3\text{e-}04$
	norma ℓ_1	$34.22 \pm 7.7\text{e-}03$	$34.22 \pm 3.4\text{e-}03$	$34.23 \pm 6.8\text{e-}04$
d 	BBC	$16.45 \pm 1.4\text{e-}04$	$16.45 \pm 2.1\text{e-}05$	$16.45 \pm 3.1\text{e-}06$
	SAR	$21.96 \pm 8.0\text{e-}04$	$21.96 \pm 3.7\text{e-}04$	$21.96 \pm 2.7\text{e-}05$
	TV	$23.61 \pm 1.8\text{e-}03$	$23.62 \pm 9.4\text{e-}04$	$23.62 \pm 5.3\text{e-}04$
	norma ℓ_1	$23.12 \pm 1.2\text{e-}03$	$23.14 \pm 1.7\text{e-}03$	$23.19 \pm 1.1\text{e-}03$
e 	BBC	$25.33 \pm 1.1\text{e-}04$	$25.33 \pm 3.6\text{e-}05$	$25.33 \pm 2.5\text{e-}06$
	SAR	$31.72 \pm 1.1\text{e-}03$	$31.72 \pm 4.6\text{e-}04$	$31.72 \pm 2.1\text{e-}04$
	TV	$32.20 \pm 8.6\text{e-}04$	$32.20 \pm 5.3\text{e-}04$	$32.20 \pm 2.3\text{e-}04$
	norma ℓ_1	$31.80 \pm 1.1\text{e-}03$	$31.81 \pm 3.3\text{e-}04$	$31.81 \pm 1.3\text{e-}04$
f 	BBC	$24.45 \pm 6.7\text{e-}05$	$24.45 \pm 1.8\text{e-}05$	$24.45 \pm 1.8\text{e-}06$
	SAR	$30.71 \pm 5.9\text{e-}04$	$30.71 \pm 2.3\text{e-}04$	$30.71 \pm 1.9\text{e-}04$
	TV	$31.58 \pm 8.9\text{e-}04$	$31.58 \pm 4.2\text{e-}04$	$31.58 \pm 2.0\text{e-}04$
	norma ℓ_1	$31.03 \pm 1.1\text{e-}03$	$31.03 \pm 3.4\text{e-}04$	$31.04 \pm 3.3\text{e-}04$
g 	BBC	$24.55 \pm 2.2\text{e-}04$	$24.55 \pm 8.7\text{e-}05$	$24.55 \pm 8.3\text{e-}06$
	SAR	$33.73 \pm 3.0\text{e-}03$	$33.75 \pm 8.0\text{e-}04$	$33.75 \pm 1.2\text{e-}04$
	TV	$34.69 \pm 3.7\text{e-}03$	$34.73 \pm 1.4\text{e-}03$	$34.73 \pm 3.3\text{e-}04$
	norma ℓ_1	$34.23 \pm 5.9\text{e-}03$	$34.23 \pm 4.0\text{e-}03$	$34.25 \pm 1.2\text{e-}03$
h 	BBC	$25.08 \pm 4.1\text{e-}04$	$25.08 \pm 9.5\text{e-}05$	$25.08 \pm 1.0\text{e-}05$
	SAR	$31.13 \pm 2.9\text{e-}03$	$31.15 \pm 6.1\text{e-}04$	$31.15 \pm 1.2\text{e-}04$
	TV	$33.25 \pm 2.7\text{e-}03$	$33.31 \pm 1.6\text{e-}03$	$33.31 \pm 3.4\text{e-}04$
	norma ℓ_1	$32.75 \pm 1.2\text{e-}02$	$32.74 \pm 4.8\text{e-}03$	$32.76 \pm 1.3\text{e-}03$

Tabla 3.3: Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones para los niveles de ruido entre 10db y 20db

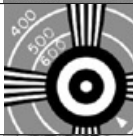
Imagen $\mathbf{x}$	Método	SNR 10db	SNR 15db	SNR 20db
a 	BBC	$23.03 \pm 6.6\text{e-}03$	$23.04 \pm 2.0\text{e-}03$	$23.04 \pm 5.5\text{e-}04$
	SAR	$27.15 \pm 6.4\text{e-}02$	$33.73 \pm 6.1\text{e-}02$	$36.77 \pm 3.4\text{e-}02$
	TV	$31.37 \pm 3.1\text{e-}02$	$34.33 \pm 1.4\text{e-}01$	$37.48 \pm 4.3\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$32.15 \pm 5.1\text{e-}02$	$34.48 \pm 1.5\text{e-}01$	$37.94 \pm 4.8\text{e-}02$
b 	BBC	$16.37 \pm 4.4\text{e-}03$	$16.38 \pm 1.1\text{e-}03$	$16.38 \pm 4.4\text{e-}04$
	SAR	$26.84 \pm 4.3\text{e-}02$	$29.66 \pm 5.2\text{e-}02$	$33.12 \pm 9.3\text{e-}02$
	TV	$27.10 \pm 1.1\text{e-}01$	$31.00 \pm 5.8\text{e-}02$	$34.41 \pm 7.5\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$27.70 \pm 1.1\text{e-}01$	$31.31 \pm 6.5\text{e-}02$	$34.61 \pm 7.2\text{e-}02$
c 	BBC	$24.72 \pm 7.0\text{e-}03$	$24.74 \pm 1.9\text{e-}03$	$24.74 \pm 6.9\text{e-}04$
	SAR	$26.15 \pm 7.7\text{e-}02$	$34.74 \pm 7.1\text{e-}02$	$38.97 \pm 4.4\text{e-}02$
	TV	$33.36 \pm 4.0\text{e-}02$	$35.32 \pm 2.2\text{e-}02$	$38.64 \pm 3.5\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$33.48 \pm 5.7\text{e-}02$	$35.59 \pm 5.3\text{e-}02$	$38.31 \pm 7.0\text{e-}02$
d 	BBC	$16.45 \pm 3.5\text{e-}03$	$16.45 \pm 1.2\text{e-}03$	$16.45 \pm 3.9\text{e-}04$
	SAR	$24.92 \pm 9.0\text{e-}02$	$28.13 \pm 6.8\text{e-}02$	$31.45 \pm 4.9\text{e-}02$
	TV	$25.46 \pm 2.2\text{e-}01$	$29.32 \pm 1.0\text{e-}01$	$32.88 \pm 3.7\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$26.39 \pm 1.0\text{e-}01$	$30.44 \pm 9.1\text{e-}02$	$33.52 \pm 6.1\text{e-}02$
e 	BBC	$25.33 \pm 4.3\text{e-}03$	$25.33 \pm 1.1\text{e-}03$	$25.33 \pm 2.3\text{e-}04$
	SAR	$31.96 \pm 7.0\text{e-}02$	$36.22 \pm 3.3\text{e-}02$	$39.19 \pm 6.6\text{e-}02$
	TV	$32.63 \pm 4.1\text{e-}02$	$35.84 \pm 2.0\text{e-}02$	$39.03 \pm 7.5\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$32.91 \pm 4.4\text{e-}02$	$35.59 \pm 5.2\text{e-}02$	$38.98 \pm 6.9\text{e-}02$
f 	BBC	$24.45 \pm 2.8\text{e-}03$	$24.45 \pm 6.4\text{e-}04$	$24.45 \pm 3.5\text{e-}04$
	SAR	$33.40 \pm 6.0\text{e-}02$	$36.62 \pm 4.1\text{e-}02$	$39.41 \pm 4.9\text{e-}02$
	TV	$33.61 \pm 3.6\text{e-}02$	$36.37 \pm 4.2\text{e-}02$	$39.72 \pm 4.7\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$33.55 \pm 4.1\text{e-}02$	$36.42 \pm 3.0\text{e-}02$	$39.69 \pm 4.9\text{e-}02$
g 	BBC	$24.53 \pm 6.6\text{e-}03$	$24.55 \pm 3.0\text{e-}03$	$24.55 \pm 9.3\text{e-}04$
	SAR	$26.54 \pm 8.8\text{e-}02$	$35.39 \pm 7.7\text{e-}02$	$40.17 \pm 4.6\text{e-}02$
	TV	$33.31 \pm 4.2\text{e-}02$	$35.76 \pm 1.8\text{e-}01$	$39.78 \pm 5.9\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$33.75 \pm 5.0\text{e-}02$	$36.00 \pm 2.0\text{e-}01$	$40.12 \pm 4.2\text{e-}02$
h 	BBC	$25.02 \pm 1.1\text{e-}02$	$25.07 \pm 3.2\text{e-}03$	$25.08 \pm 1.1\text{e-}03$
	SAR	$21.51 \pm 8.7\text{e-}02$	$30.55 \pm 4.4\text{e-}02$	$36.31 \pm 4.8\text{e-}02$
	TV	$31.42 \pm 4.7\text{e-}02$	$33.47 \pm 4.3\text{e-}02$	$36.80 \pm 4.7\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$31.72 \pm 3.6\text{e-}02$	$34.07 \pm 7.0\text{e-}02$	$36.81 \pm 9.5\text{e-}02$

Tabla 3.4: Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones para los niveles de ruido entre 25db y 40db

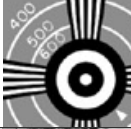
Imagen $\mathbf{x}$	Método	SNR 25db	SNR 30db	SNR 40db
a 	BBC	$23.04 \pm 2.2\text{e-}04$	$23.04 \pm 5.0\text{e-}05$	$23.04 \pm 5.4\text{e-}06$
	SAR	$40.66 \pm 6.3\text{e-}02$	$45.07 \pm 9.0\text{e-}02$	$46.41 \pm 9.9\text{e-}02$
	TV	$41.07 \pm 4.4\text{e-}02$	$45.57 \pm 9.0\text{e-}02$	$47.40 \pm 1.5\text{e-}01$
	norma ℓ_1	$41.52 \pm 5.0\text{e-}02$	$45.80 \pm 8.7\text{e-}02$	$48.26 \pm 1.8\text{e-}01$
b 	BBC	$16.38 \pm 1.7\text{e-}04$	$16.38 \pm 4.1\text{e-}05$	$16.38 \pm 5.9\text{e-}06$
	SAR	$37.00 \pm 7.8\text{e-}02$	$41.17 \pm 1.5\text{e-}01$	$42.57 \pm 6.8\text{e-}02$
	TV	$38.37 \pm 7.7\text{e-}02$	$42.77 \pm 1.3\text{e-}01$	$45.54 \pm 6.5\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$38.47 \pm 7.0\text{e-}02$	$42.73 \pm 1.3\text{e-}01$	$45.85 \pm 8.4\text{e-}02$
c 	BBC	$24.74 \pm 3.2\text{e-}04$	$24.74 \pm 1.1\text{e-}04$	$24.74 \pm 8.0\text{e-}06$
	SAR	$41.72 \pm 4.8\text{e-}02$	$45.42 \pm 1.2\text{e-}01$	$47.67 \pm 1.5\text{e-}01$
	TV	$41.69 \pm 4.8\text{e-}02$	$45.74 \pm 1.0\text{e-}01$	$48.48 \pm 1.6\text{e-}01$
	norma ℓ_1	$41.72 \pm 4.4\text{e-}02$	$45.68 \pm 9.6\text{e-}02$	$48.82 \pm 2.0\text{e-}01$
d 	BBC	$16.45 \pm 1.2\text{e-}04$	$16.45 \pm 2.6\text{e-}05$	$16.45 \pm 4.0\text{e-}06$
	SAR	$35.41 \pm 7.0\text{e-}02$	$39.53 \pm 5.8\text{e-}02$	$39.97 \pm 5.5\text{e-}02$
	TV	$36.87 \pm 6.1\text{e-}02$	$41.05 \pm 7.0\text{e-}02$	$42.61 \pm 9.2\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$37.16 \pm 5.2\text{e-}02$	$41.31 \pm 6.4\text{e-}02$	$43.52 \pm 1.4\text{e-}01$
e 	BBC	$25.33 \pm 9.4\text{e-}05$	$25.33 \pm 2.5\text{e-}05$	$25.33 \pm 2.7\text{e-}06$
	SAR	$43.29 \pm 8.8\text{e-}02$	$46.23 \pm 1.3\text{e-}01$	$45.10 \pm 1.7\text{e-}02$
	TV	$43.26 \pm 8.3\text{e-}02$	$46.60 \pm 1.4\text{e-}01$	$45.53 \pm 2.5\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$43.16 \pm 9.3\text{e-}02$	$46.69 \pm 1.7\text{e-}01$	$45.60 \pm 3.6\text{e-}02$
f 	BBC	$24.45 \pm 3.5\text{e-}05$	$24.45 \pm 1.9\text{e-}05$	$24.45 \pm 1.9\text{e-}06$
	SAR	$43.54 \pm 6.9\text{e-}02$	$44.61 \pm 1.7\text{e-}01$	$43.75 \pm 8.9\text{e-}03$
	TV	$43.89 \pm 5.9\text{e-}02$	$45.40 \pm 2.2\text{e-}01$	$44.47 \pm 2.2\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$43.82 \pm 6.6\text{e-}02$	$45.46 \pm 2.1\text{e-}01$	$44.67 \pm 2.0\text{e-}02$
g 	BBC	$24.55 \pm 2.9\text{e-}04$	$24.55 \pm 7.7\text{e-}05$	$24.55 \pm 7.1\text{e-}06$
	SAR	$43.85 \pm 6.1\text{e-}02$	$47.78 \pm 5.9\text{e-}02$	$52.05 \pm 2.6\text{e-}01$
	TV	$43.08 \pm 5.1\text{e-}02$	$47.14 \pm 5.5\text{e-}02$	$51.12 \pm 2.3\text{e-}01$
	norma ℓ_1	$43.28 \pm 6.2\text{e-}02$	$47.26 \pm 4.7\text{e-}02$	$51.39 \pm 2.1\text{e-}01$
h 	BBC	$25.08 \pm 3.1\text{e-}04$	$25.08 \pm 1.4\text{e-}04$	$25.08 \pm 1.0\text{e-}05$
	SAR	$39.01 \pm 3.0\text{e-}02$	$42.59 \pm 5.9\text{e-}02$	$45.47 \pm 4.6\text{e-}02$
	TV	$39.53 \pm 3.2\text{e-}02$	$43.24 \pm 5.2\text{e-}02$	$46.72 \pm 5.5\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$39.69 \pm 3.8\text{e-}02$	$43.35 \pm 4.5\text{e-}02$	$47.26 \pm 5.5\text{e-}02$

Tabla 3.5: Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 11 observaciones para los niveles de ruido entre 10db y 20db

Imagen $\mathbf{x}$	Método	SNR 10db	SNR 15db	SNR 20db
a 	BBC	$19.05 \pm 7.8\text{e-}03$	$19.06 \pm 1.9\text{e-}03$	$19.06 \pm 4.2\text{e-}04$
	SAR	$25.12 \pm 9.3\text{e-}02$	$29.38 \pm 4.3\text{e-}02$	$31.62 \pm 4.3\text{e-}02$
	TV	$27.37 \pm 8.0\text{e-}02$	$29.81 \pm 4.1\text{e-}02$	$31.93 \pm 2.9\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$27.52 \pm 9.1\text{e-}02$	$30.15 \pm 6.5\text{e-}02$	$32.00 \pm 3.2\text{e-}02$
b 	BBC	$12.72 \pm 2.1\text{e-}03$	$12.72 \pm 1.4\text{e-}03$	$12.72 \pm 4.3\text{e-}04$
	SAR	$21.53 \pm 1.3\text{e-}01$	$24.48 \pm 7.6\text{e-}02$	$26.98 \pm 3.8\text{e-}02$
	TV	$21.38 \pm 1.3\text{e-}01$	$24.04 \pm 6.3\text{e-}02$	$26.07 \pm 4.1\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$21.41 \pm 1.5\text{e-}01$	$24.14 \pm 8.6\text{e-}02$	$26.15 \pm 4.1\text{e-}02$
c 	BBC	$19.93 \pm 6.9\text{e-}03$	$19.94 \pm 1.8\text{e-}03$	$19.94 \pm 8.5\text{e-}04$
	SAR	$24.68 \pm 7.4\text{e-}02$	$31.15 \pm 3.4\text{e-}02$	$33.45 \pm 3.4\text{e-}02$
	TV	$29.34 \pm 6.8\text{e-}02$	$31.85 \pm 6.3\text{e-}02$	$33.82 \pm 3.7\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$29.26 \pm 1.3\text{e-}01$	$31.91 \pm 4.6\text{e-}02$	$33.79 \pm 3.2\text{e-}02$
d 	BBC	$13.36 \pm 3.3\text{e-}03$	$13.36 \pm 1.3\text{e-}03$	$13.36 \pm 2.4\text{e-}04$
	SAR	$21.89 \pm 5.7\text{e-}02$	$24.27 \pm 2.8\text{e-}02$	$26.49 \pm 2.4\text{e-}02$
	TV	$22.96 \pm 6.3\text{e-}02$	$25.44 \pm 4.6\text{e-}02$	$27.33 \pm 2.5\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$22.63 \pm 9.0\text{e-}02$	$25.89 \pm 4.9\text{e-}02$	$27.61 \pm 2.3\text{e-}02$
e 	BBC	$21.36 \pm 3.1\text{e-}03$	$21.36 \pm 5.5\text{e-}04$	$21.36 \pm 2.4\text{e-}04$
	SAR	$29.13 \pm 4.0\text{e-}02$	$31.25 \pm 3.5\text{e-}02$	$32.77 \pm 1.4\text{e-}02$
	TV	$29.37 \pm 2.5\text{e-}02$	$31.12 \pm 3.3\text{e-}02$	$32.48 \pm 1.8\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$29.33 \pm 4.5\text{e-}02$	$31.06 \pm 3.4\text{e-}02$	$32.44 \pm 1.2\text{e-}02$
f 	BBC	$19.88 \pm 1.7\text{e-}03$	$19.89 \pm 6.6\text{e-}04$	$19.89 \pm 1.6\text{e-}04$
	SAR	$29.53 \pm 3.2\text{e-}02$	$31.09 \pm 2.2\text{e-}02$	$32.26 \pm 1.6\text{e-}02$
	TV	$29.77 \pm 5.1\text{e-}02$	$31.33 \pm 2.0\text{e-}02$	$32.46 \pm 1.5\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$29.73 \pm 6.1\text{e-}02$	$31.24 \pm 1.9\text{e-}02$	$32.42 \pm 1.7\text{e-}02$
g 	BBC	$18.93 \pm 7.1\text{e-}03$	$18.94 \pm 1.9\text{e-}03$	$18.94 \pm 8.5\text{e-}04$
	SAR	$26.14 \pm 7.4\text{e-}02$	$32.05 \pm 7.1\text{e-}02$	$34.33 \pm 3.8\text{e-}02$
	TV	$29.12 \pm 4.2\text{e-}02$	$32.25 \pm 5.0\text{e-}02$	$34.41 \pm 4.6\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$29.47 \pm 7.8\text{e-}02$	$32.57 \pm 7.0\text{e-}02$	$34.73 \pm 3.7\text{e-}02$
h 	BBC	$20.76 \pm 9.6\text{e-}03$	$20.77 \pm 3.6\text{e-}03$	$20.77 \pm 1.2\text{e-}03$
	SAR	$20.39 \pm 6.2\text{e-}02$	$28.34 \pm 5.3\text{e-}02$	$31.61 \pm 3.0\text{e-}02$
	TV	$28.20 \pm 6.4\text{e-}02$	$30.21 \pm 5.6\text{e-}02$	$32.49 \pm 3.8\text{e-}02$
	norma ℓ_1	$28.45 \pm 8.9\text{e-}02$	$30.66 \pm 6.1\text{e-}02$	$32.35 \pm 6.1\text{e-}02$

Tabla 3.6: Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 11 observaciones para los niveles de ruido entre 25db y 40db

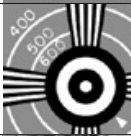
Imagen x	Método	SNR 25db	SNR 30db	SNR 40db
a 	BBC	$19.06 \pm 2.5e-04$	$19.06 \pm 7.2e-05$	$19.06 \pm 5.6e-06$
	SAR	$33.55 \pm 1.8e-02$	$33.96 \pm 7.6e-03$	$34.01 \pm 4.4e-03$
	TV	$33.54 \pm 1.8e-02$	$33.93 \pm 1.3e-02$	$34.00 \pm 8.9e-03$
	norma ℓ_1	$33.71 \pm 1.8e-02$	$34.14 \pm 4.7e-03$	$34.17 \pm 8.2e-03$
b 	BBC	$12.72 \pm 1.4e-04$	$12.72 \pm 4.4e-05$	$12.72 \pm 5.1e-06$
	SAR	$27.94 \pm 1.3e-02$	$28.09 \pm 9.8e-03$	$28.10 \pm 5.9e-03$
	TV	$26.89 \pm 1.4e-02$	$27.01 \pm 1.4e-02$	$27.04 \pm 1.4e-02$
	norma ℓ_1	$27.07 \pm 9.8e-03$	$27.21 \pm 5.7e-03$	$27.22 \pm 7.6e-03$
c 	BBC	$19.94 \pm 2.6e-04$	$19.94 \pm 9.8e-05$	$19.94 \pm 8.0e-06$
	SAR	$35.20 \pm 2.1e-02$	$35.88 \pm 5.8e-03$	$35.98 \pm 1.8e-03$
	TV	$35.49 \pm 2.1e-02$	$36.18 \pm 9.0e-03$	$36.28 \pm 2.7e-03$
	norma ℓ_1	$35.41 \pm 1.4e-02$	$36.14 \pm 1.1e-02$	$36.22 \pm 7.6e-03$
d 	BBC	$13.36 \pm 8.7e-05$	$13.36 \pm 4.2e-05$	$13.36 \pm 4.2e-06$
	SAR	$27.58 \pm 6.7e-03$	$27.75 \pm 4.2e-03$	$27.77 \pm 3.1e-03$
	TV	$28.45 \pm 7.7e-03$	$28.66 \pm 6.7e-03$	$28.73 \pm 2.9e-02$
	norma ℓ_1	$28.83 \pm 7.1e-03$	$29.07 \pm 6.5e-03$	$29.08 \pm 4.0e-03$
e 	BBC	$21.36 \pm 1.1e-04$	$21.36 \pm 3.8e-05$	$21.36 \pm 2.9e-06$
	SAR	$33.37 \pm 4.3e-03$	$33.44 \pm 1.4e-03$	$33.45 \pm 1.7e-03$
	TV	$33.00 \pm 6.2e-03$	$33.06 \pm 3.9e-03$	$33.08 \pm 1.8e-03$
	norma ℓ_1	$33.00 \pm 7.1e-03$	$33.06 \pm 5.3e-03$	$33.06 \pm 8.3e-03$
f 	BBC	$19.89 \pm 5.9e-05$	$19.89 \pm 1.4e-05$	$19.89 \pm 1.6e-06$
	SAR	$32.53 \pm 3.3e-03$	$32.56 \pm 1.1e-03$	$32.56 \pm 1.2e-03$
	TV	$32.71 \pm 6.2e-03$	$32.73 \pm 4.1e-03$	$32.74 \pm 8.5e-03$
	norma ℓ_1	$32.71 \pm 5.7e-03$	$32.75 \pm 6.1e-03$	$32.75 \pm 3.1e-03$
g 	BBC	$18.94 \pm 2.7e-04$	$18.94 \pm 6.6e-05$	$18.94 \pm 5.9e-06$
	SAR	$36.68 \pm 2.6e-02$	$37.69 \pm 1.4e-02$	$37.82 \pm 5.0e-03$
	TV	$36.30 \pm 2.9e-02$	$37.15 \pm 1.7e-02$	$37.28 \pm 2.4e-02$
	norma ℓ_1	$36.48 \pm 2.4e-02$	$37.43 \pm 2.2e-02$	$37.51 \pm 9.8e-03$
h 	BBC	$20.77 \pm 4.3e-04$	$20.77 \pm 8.8e-05$	$20.77 \pm 1.2e-05$
	SAR	$33.39 \pm 2.3e-02$	$34.49 \pm 9.5e-03$	$34.68 \pm 2.6e-03$
	TV	$34.03 \pm 2.6e-02$	$35.14 \pm 1.2e-02$	$35.35 \pm 9.0e-03$
	norma ℓ_1	$34.14 \pm 1.6e-02$	$35.33 \pm 8.0e-03$	$35.54 \pm 1.0e-02$



Figura 3.3: Imagen original y las 2 observaciones generadas con factor de magnificación 2 y ruido Gaussiano aditivo de 10db.

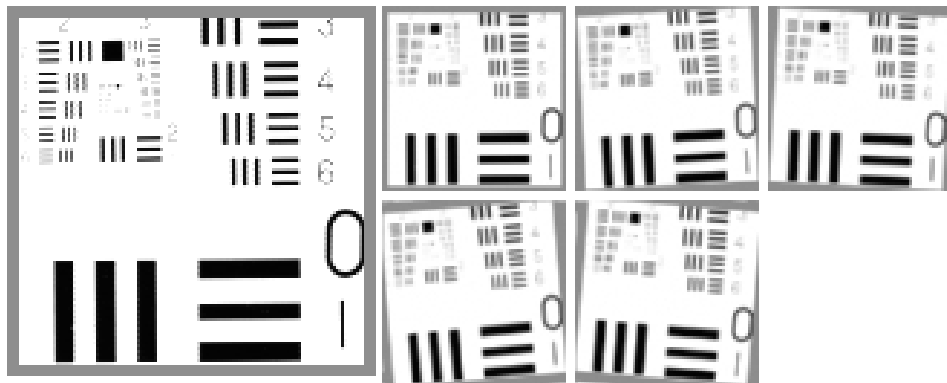


Figura 3.4: Imagen original y las 5 observaciones generadas con factor de magnificación 2 y ruido Gaussiano aditivo de 15db.



Figura 3.5: Imagen original y las 11 observaciones generadas con factor de magnificación 4 y ruido Gaussiano aditivo de $30db$.

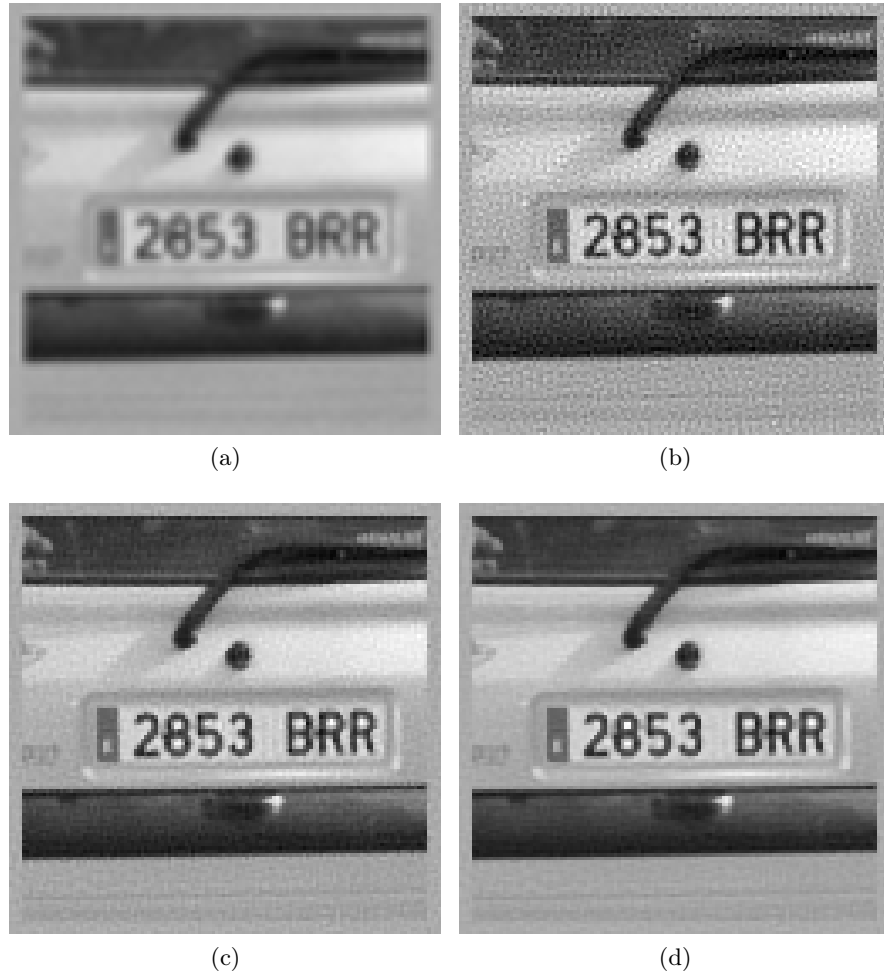


Figura 3.6: Reconstrucción de imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones a partir de las observaciones con nivel de ruido de $10db$. (a) muestra la reconstrucción aplicando la interpolación bilineal bicúbica con $PSNR = 23,03$, (b) muestra la imagen obtenida con algoritmo basado en el modelo SAR con $PSNR = 27,19$, (c) representa la reconstrucción usando el modelo TV con $PSNR = 31,41$ y (d) muestra el resultado de aplicar método basado en la norma ℓ_1 con $PSNR = 32,16$.

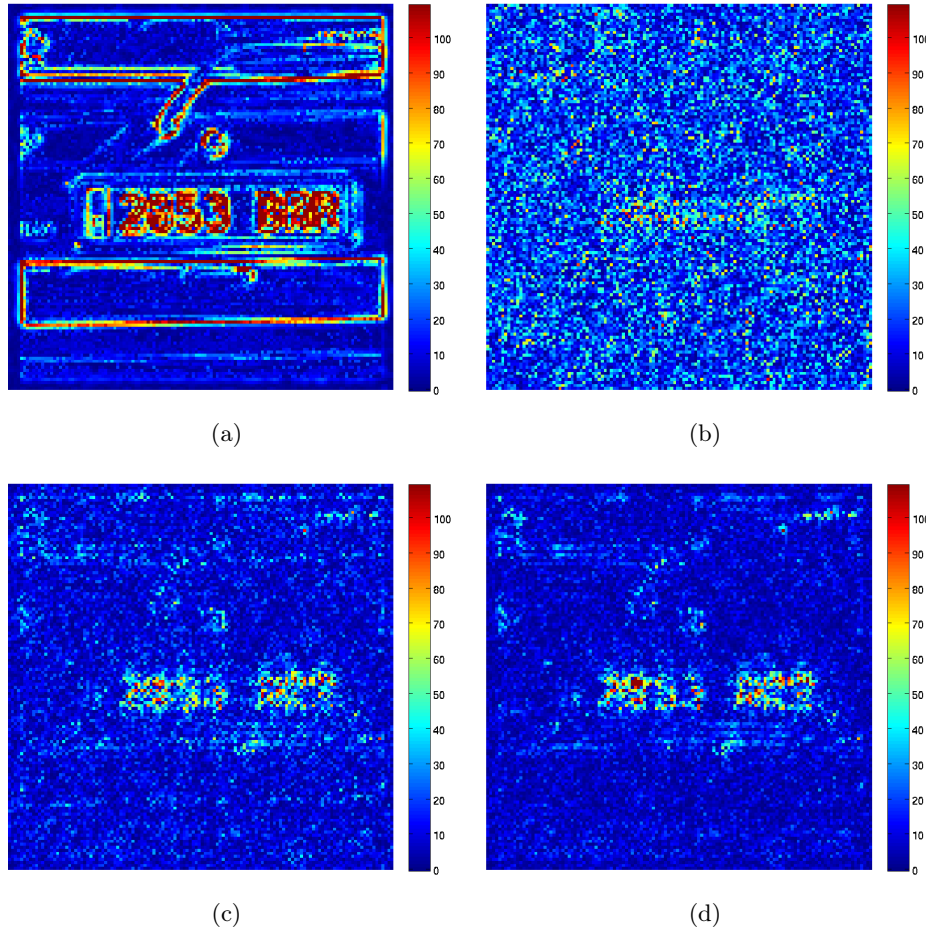


Figura 3.7: Muestra $|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{true}|$ para las imágenes de AR estimadas $\hat{\mathbf{x}}$ en el experimento con 5 observaciones con nivel de ruido de $10db$ en las observaciones. Dependiendo del algoritmo utilizado para la estimación de $\hat{\mathbf{x}}$ resultan las siguientes imágenes: (a) cuando es aplicada la interpolación bilineal bicúbica, (b) si se usa el método basado en el modelo SAR, (c) el método basado en el modelo TV y (d) el algoritmo basado la norma ℓ_1 .

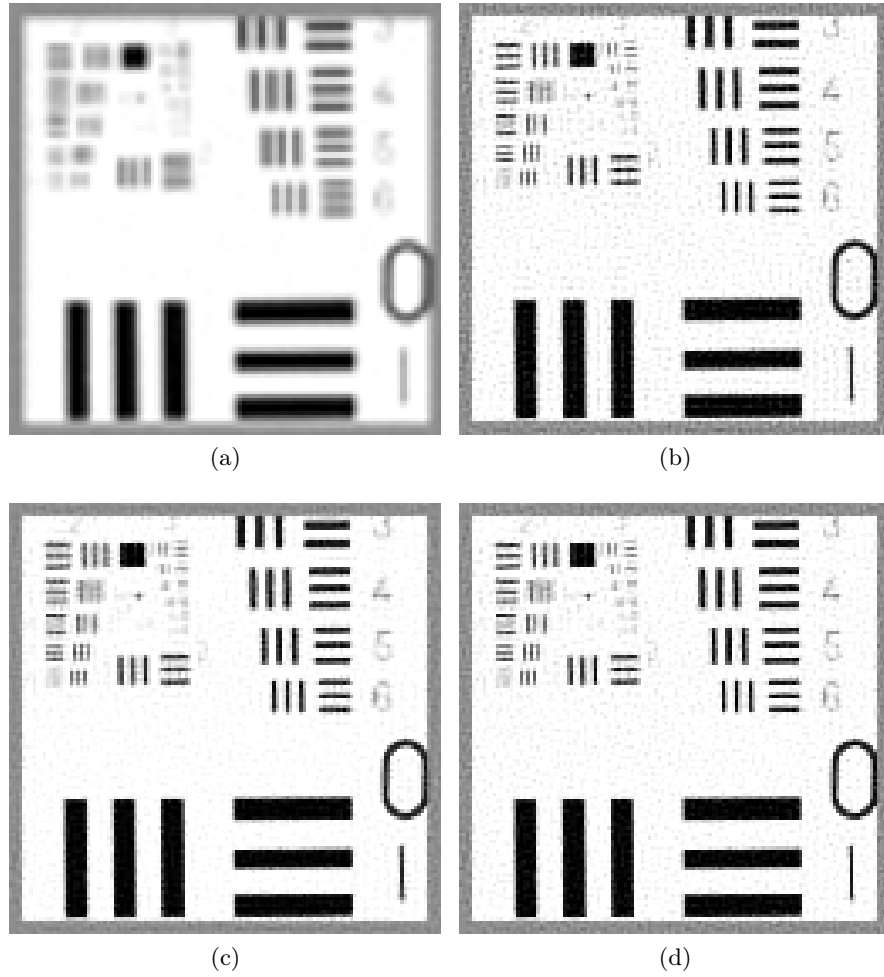


Figura 3.8: Reconstrucción de imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones a partir de las observaciones con nivel de ruido de $10db$. (a) muestra la reconstrucción aplicando la interpolación bilineal bicúbica con $PSNR = 16,45$, (b) muestra la imagen obtenida con algoritmo basado en el modelo SAR con $PSNR = 24,87$, (c) representa la reconstrucción usando el modelo TV con $PSNR = 25,80$ y (d) muestra el resultado de aplicar método basado en la norma ℓ_1 con $PSNR = 26,57$.

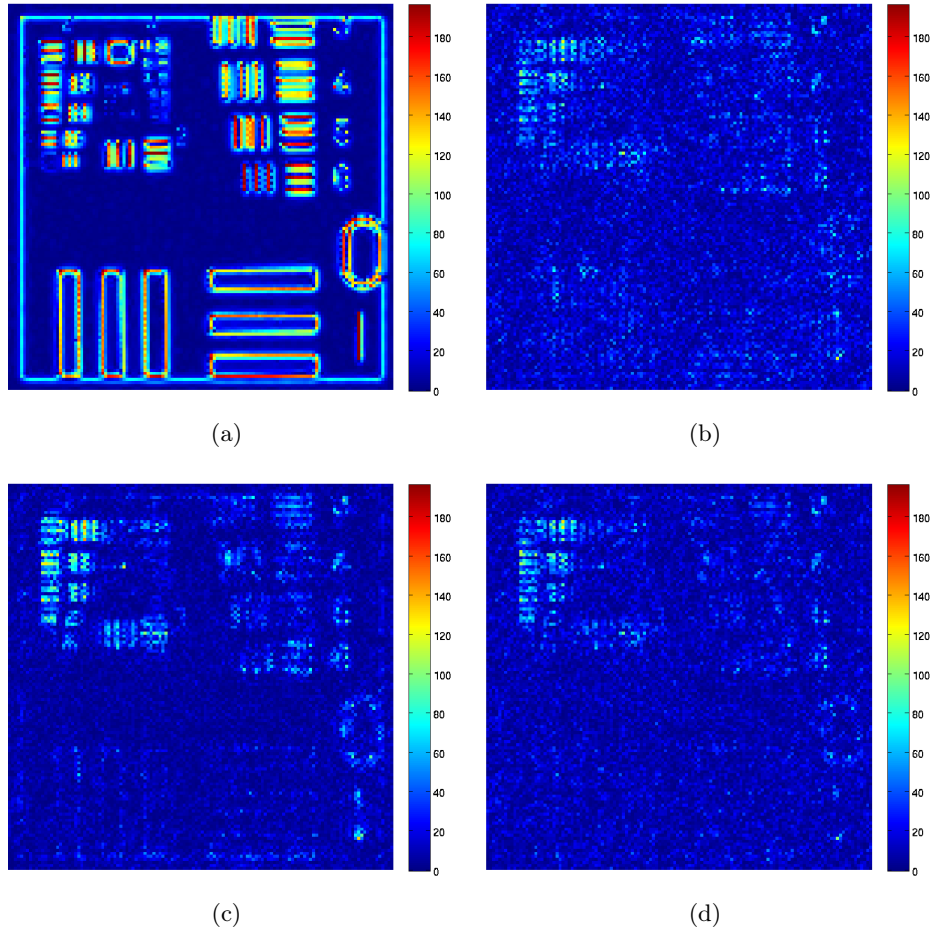


Figura 3.9: Muestra $|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{true}|$ para las imágenes de AR estimadas $\hat{\mathbf{x}}$ en el experimento con 5 observaciones con nivel de ruido de $10db$ en las observaciones. Dependiendo del algoritmo utilizado para la estimación de $\hat{\mathbf{x}}$ resultan las siguientes imágenes: (a) cuando es aplicada la interpolación bilineal bicúbica, (b) si se usa el método basado en el modelo SAR, (c) el método basado en el modelo TV y (d) el algoritmo basado la norma ℓ_1 .

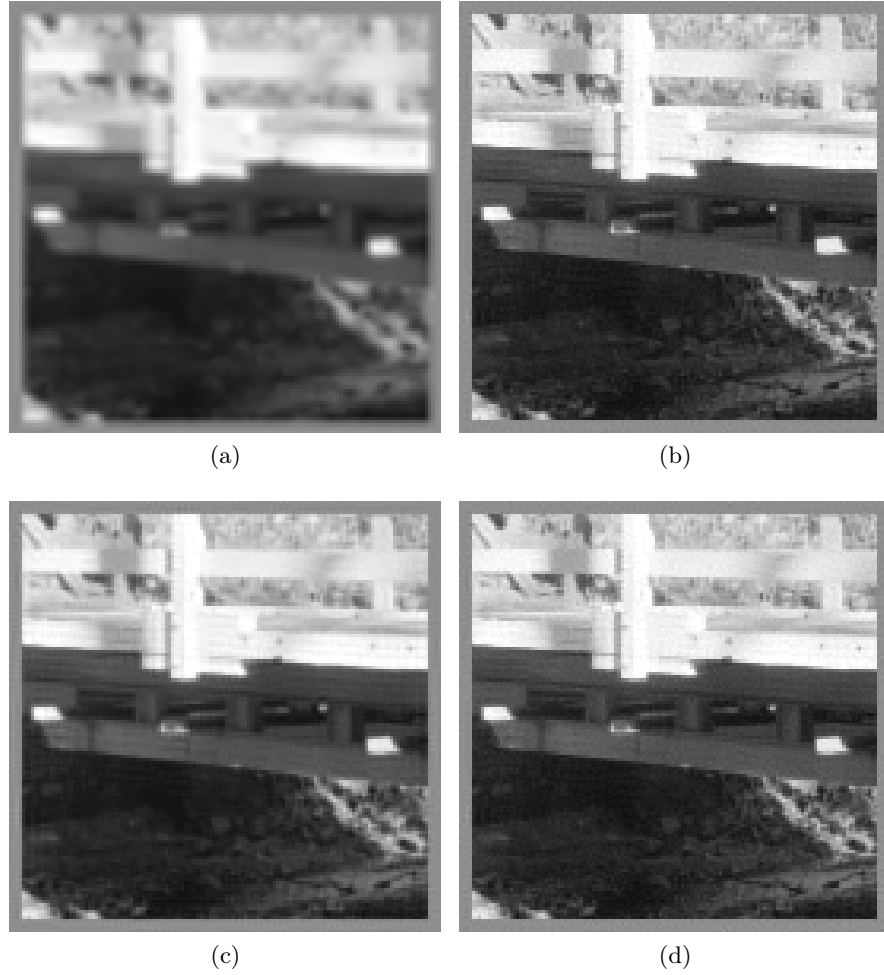


Figura 3.10: Reconstrucción de imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones a partir de las observaciones con nivel de ruido de $20db$. (a) muestra la reconstrucción aplicando la interpolación bilineal bicúbica con $PSNR = 25,08$, (b) muestra la imagen obtenida con algoritmo basado en el modelo SAR con $PSNR = 36,36$, (c) representa la reconstrucción usando el modelo TV con $PSNR = 34,39$ y (d) muestra el resultado de aplicar método basado en la norma ℓ_1 con $PSNR = 36,34$.

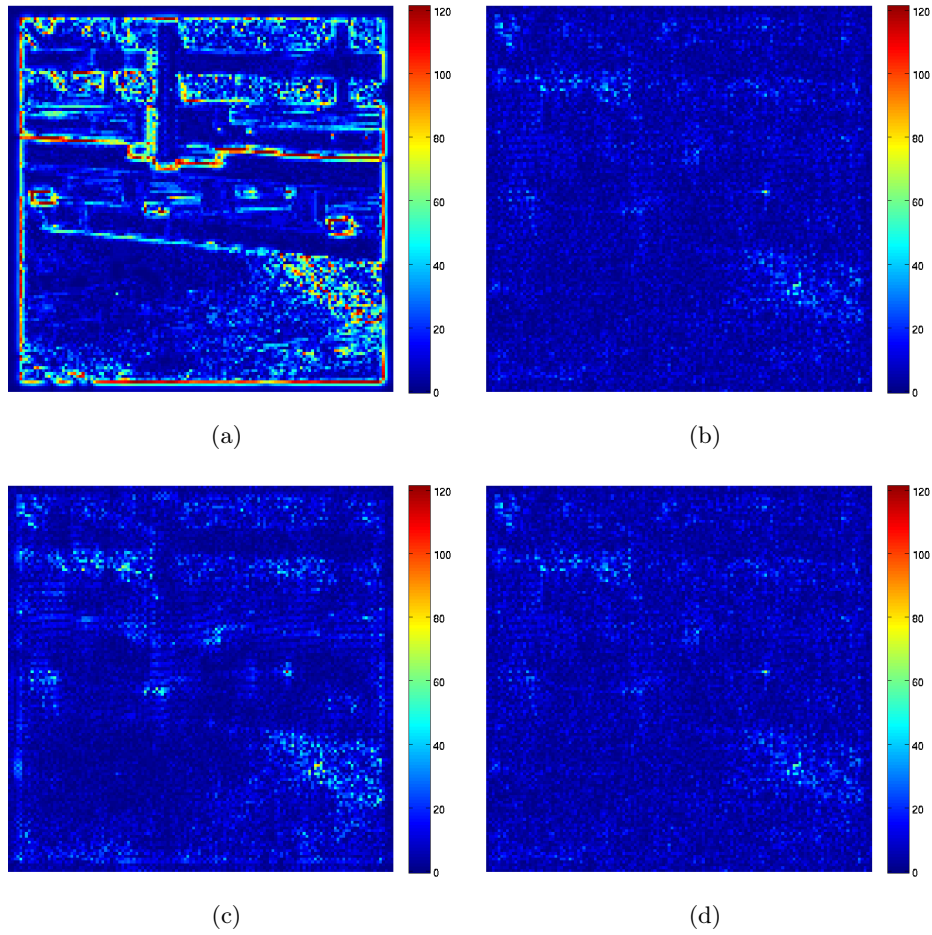


Figura 3.11: Muestra $|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{true}|$ para las imágenes de AR estimadas $\hat{\mathbf{x}}$ en el experimento con 5 observaciones con nivel de ruido de $20db$ en las observaciones. Dependiendo del algoritmo utilizado para la estimación de $\hat{\mathbf{x}}$ resultan las siguientes imágenes: (a) cuando es aplicada la interpolación bilineal bicúbica, (b) si se usa el método basado en el modelo SAR, (c) el método basado en el modelo TV y (d) el algoritmo basado la norma ℓ_1 .

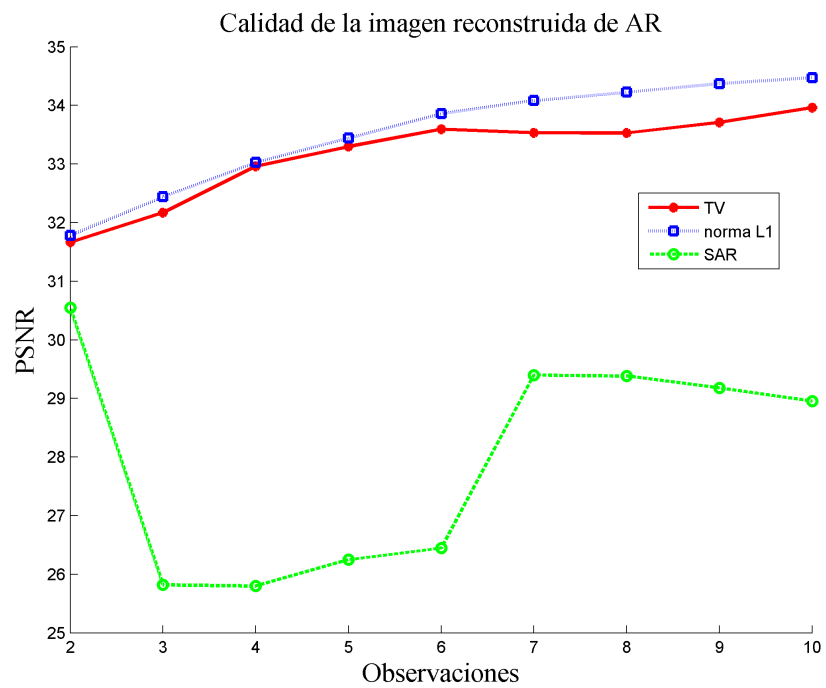


Figura 3.12: Evolución media del PSNR en función del número de observaciones de BR generadas partir de la imagen 3.2(c) con factor de magnificación 2 y ruido Gaussiano aditivo de 10db.

Capítulo 4

Superresolución Usando Combinación de Modelos a Priori

4.1. Introducción

La dificultad de encontrar un modelo a priori válido para cualquier tipo de imagen, ha propiciado que paralelamente y desde diversos enfoques hayan surgido modelos mixtos, para adaptarse a la diversidad de características de las imágenes. En este sentido podemos mencionar el enfoque basado en modelos a priori adaptativos Elad y Datsenko (2009) (para uno o para varios modelos a priori) y recientemente el enfoque basado en la combinación de modelos a priori. Un ejemplo característico de modelo a priori adaptativo basado en un único modelo lo encontramos en Lagendijk y Biemond (1991), en donde se propone un Laplaciano adaptativo cuya función de energía es definida de la forma:

$$\mathbf{U} = (\mathcal{C}\mathbf{x})^T Q(\mathcal{C}\mathbf{x}), \quad (4.1)$$

donde $\mathcal{C}$ representa el operador Laplaciano y Q es una matriz diagonal $NP \times NP$ y tal que $Q(i, i) = 1$ si el pixel i está en una región homogénea o $Q(i, i) = 0$ si el pixel i está sobre un borde. Las características de cada pixel de la imagen $\mathbf{x}$ se obtienen de la segmentación de la imagen en cada iteración.

Varios trabajos que aplican difusión anisotrópica ha aplicado esta idea de combinar modelos. En este enfoque basado en la difusión, puede introducirse información a priori en el coeficiente de difusión (ver Weickert (1997)), y esta información puede adaptarse a las características de cada pixel.

Hemos de reseñar las variantes propuestas en Chambolle y Lions (1997) y You y Kaveh (1999). En Chambolle y Lions (1997) combinan un Laplaciano adaptativo con el modelo TV. En concreto, se define un umbral ϵ , por encima

del cual, se aplicará la distribución a priori TV, si $\sqrt{((\Delta^h \mathbf{x})_i^2 + (\Delta^v \mathbf{x})_i^2)} > \epsilon$ y en caso contrario se aplica un modelo a priori más suave, para regiones más homogéneas. Mientras que en You y Kaveh (1999) proponen una combinación de la Laplaciana y TV dependiendo del valor del gradiente. Esto es, se da mayor peso a la Laplaciana para valores de gradiente bajos (áreas suaves) y al modelo TV para valores de gradiente altos (áreas de fuertes transiciones de luminosidad) con el objeto de preservar los bordes y eliminar el ruido.

Los trabajos comentados hasta ahora se caracterizan por aplicar en cada pixel de la imagen diferentes modelos a priori de forma excluyente. Sin embargo, en trabajos recientes se ha optado por aplicar simultáneamente más de un modelo a priori en cada pixel, con el objetivo de recoger la diversidad de propiedades que pueden confluir en cada pixel. Esto es, utilizan una combinación de modelos a priori.

En estos trabajos distinguimos dos enfoques. Por un lado tenemos el enfoque basado en *productos de expertos (modelos): Product of Experts (PoE)* propuestos en Hinton (1999), Hinton (2002) y en Roth y Black (2005), y aplicado en Sun y Cham (2007), Chantas et al. (October 2008) y Chantas et al. (2010). Por otro lado tenemos el enfoque basado en la combinación lineal de diferentes modelos a priori propuesto en Villena et al. (2010a) y Villena et al. (2010c), y que forman parte de las aportaciones de esta memoria.

En el enfoque PoE se concibe la mezcla o combinación de distribuciones como un producto de modelos probabilísticos de la forma:

$$p(\mathbf{x}|\{\theta_k\}) = \frac{1}{\mathbf{Z}} \prod_{i=1}^L p_i(\mathbf{x}|\theta_i), \quad (4.2)$$

siendo $\mathbf{Z}$ la función de partición definida de la forma:

$$\mathbf{Z} = \int d\mathbf{x} \prod_{i=1}^L p_i(\mathbf{x}|\theta_i). \quad (4.3)$$

La evaluación de la función $\mathbf{Z}$ no es fácil y es uno de los inconvenientes que nos plantea este enfoque.

Tanto en Roth y Black (2005) como en Sun y Cham (2007) ajustan el modelo a priori PoE mediante entrenamiento a partir de un conjunto de imágenes. Estos dos trabajos utilizan diferentes modelos a priori MRF, y superponen los diferentes corros (cliques) (utilizados en cada modelo a priori MRF) mediante PoE.

En Chantas et al. (October 2008) proponen un modelo a priori PoE de distribuciones t-Student, cuyo ajuste se realiza a partir de las observaciones, obteniendo un filtro paso alta. En el citado trabajo se propone una metodología de inferencia Bayesiana basada en la aproximación variacional restringida, que evita la evaluación de la constante de normalización del PoE resultante.

En Chantas et al. (2010) se propone una variante del trabajo anterior que plantea la combinación de diferentes modelos a priori TV y t-Student usando PoE. La contribución de este trabajo es aunar las ventajas del modelo TV de Babacan et al. (2008b) y el PoE de t-Student de Chantas et al. (October 2008).

En los modelos a priori basados en PoE anteriormente citados, todos los modelos que intervienen contribuyen por igual. Por nuestra parte pensamos que este enfoque no es necesariamente válido para cualquier tipo de imagen.

Consideremos, en primer lugar, un modelo a priori con una función de energía definida como combinación lineal de los otros modelos. Por ejemplo, la combinación del modelo a priori SAR de la Ec. (3.1) y el modelo basado en la norma ℓ_1 de la Ec. (3.2) podría ser:

$$p(\mathbf{x}|\alpha_1, \alpha_2) \propto \frac{1}{\mathbf{Z}(\alpha_2, \alpha_1)} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^{PN} \left[\alpha_2^h \left\| \Delta_i^h(\mathbf{x}) \right\|_1 + \alpha_2^v \left\| \Delta_i^v(\mathbf{x}) \right\|_1 \right] - \frac{\alpha_1}{2} \|\mathcal{C}\mathbf{x}\| \right\} \quad (4.4)$$

Esta solución resulta inviable, ya que la función de partición no se puede obtener de forma explícita. En Villena et al. (2010a) y Villena et al. (2010c) salvamos este problema proponiendo una combinación lineal de distribuciones de probabilidad a posteriori construidas con diferentes modelos. Concretamente, en Villena et al. (2010a) combinamos el modelo SAR con el modelo TV, y en Villena et al. (2010c) con el modelo basado en la norma ℓ_1 . En lo que resta de este capítulo describimos detalladamente ambas propuestas.

4.2. Modelado Bayesiano Jerarquizado

En lo que resta de capítulo abordamos la modelización Bayesiana del problema de la SR combinando funciones de distribución de probabilidad a posteriori correspondientes a diversos modelos a priori de la imagen de AR. Nos centraremos, en concreto, en la combinación del modelo SAR con el modelo TV y con el modelo basado en la norma ℓ_1 descrito en el capítulo anterior. Como ya se ha dicho, nuestro punto de partida serán las distribuciones a posteriori correspondientes a cada uno de los modelos a combinar.

En el capítulo anterior obtuvimos, dentro del modelo Bayesiano Jerárquico, las distribuciones conjuntas sobre todas las variables estadísticas de nuestro problema de SR, para el modelo SAR en la Ec. (3.11) y para el modelo basado en la norma ℓ_1 en la Ec. (3.12). Ambas expresiones se pueden expresar de forma más general, mediante la siguiente ecuación

$$p_l(\Theta_l, \mathbf{y}) = p_l(\alpha_l, \Omega, \mathbf{y}) = p(\mathbf{y}|\Omega) p_l(\mathbf{x}|\alpha_l) p(\alpha_l) \prod_{k=1}^L p(\beta_k), \quad (4.5)$$

para $l = \{1, 2\}$, siendo $\Omega = \{\mathbf{x}, \{\beta_k\}\}$, $\Theta_l = \{\Omega, \alpha_l\}$, $p(\alpha_2) = p(\alpha_2^h)p(\alpha_2^v)$ y $p_1(\mathbf{x}|\alpha_1)$ y $p_2(\mathbf{x}|\alpha_2)$ ya han sido definidas en las Ecs. (3.1) y (3.2), respectivamente.

La verosimilitud $p(\mathbf{y}|\Omega)$ será modelada como en la Ec. (3.4). Los hiperprior $p(\alpha_l)$ y $p(\beta_k)$ serán modelados como se definieron en la sección 3.2.3 por la Ec. (3.10).

La distribución conjunta correspondiente al modelo TV puede encajarse también en la definición de la Ec. (4.5) para $l = 3$, siendo el modelo a priori TV para la imagen de AR:

$$p_3(\mathbf{x}|\alpha_3) \propto \alpha_3^{\frac{PN}{2}} \exp \left\{ -\frac{\alpha_3}{2} \sum_{i=1}^{PN} \sqrt{(\Delta_i^h(\mathbf{x}))^2 + (\Delta_i^v(\mathbf{x}))^2} \right\}. \quad (4.6)$$

Obsérvese que no hemos incluido el emborronamiento que damos por conocido en toda esta memoria, ni el movimiento que por ahora seguimos dando por conocido, pero cuya estimación estudiaremos en el capítulo siguiente.

4.3. Inferencia Bayesiana Variacional

Presentamos aquí un método variacional de inferencia Bayesiana en base a m modelos a posteriori $p(\alpha_l, \Omega|\mathbf{y})$ para $l = 1, \dots, m$, sobre el conjunto de variables desconocidas $\Phi = \{\Omega, \{\alpha_l\}\}$, dadas las observaciones $\mathbf{y}$. La inferencia se realizará mediante la distribución $q(\Phi) = q(\Omega) \prod_{l=1}^m q(\alpha_l)$ que minimice la siguiente combinación de divergencias de KL

$$\hat{q}(\Phi) = \underset{q(\Phi)}{\operatorname{argmin}} \sum_{l=1}^m \lambda_l C_{KL}(q(\Theta_l) || p_l(\Theta_l|\mathbf{y})), \quad (4.7)$$

donde $\lambda_l \geq 0$ para $l = 1, \dots, m$ y $\sum_{l=1}^m \lambda_l = 1$,

$$q(\Phi) = q(\Omega) \prod_{l=1}^m q(\alpha_l), \quad q(\Omega) = q(\mathbf{x}) \prod_{k=1}^L q(\beta_k), \quad (4.8)$$

y la divergencia de KL vendrá dada por

$$C_{KL}(q(\Omega)q(\alpha_l) || p_l(\Omega, \alpha_l|\mathbf{y})) = \int q(\Omega)q(\alpha_l) \log \left(\frac{q(\Omega)q(\alpha_l)}{p_l(\Omega, \alpha_l|\mathbf{y})} \right) d\Omega d\alpha_l + \text{Const.} \quad (4.9)$$

La estimación de los coeficientes $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ no será estudiada en esta memoria, pero demostraremos experimentalmente que una combinación no degenerada de las divergencias, esto es, una combinación en la que

hay más de un coeficiente $\lambda_l \neq 0$, puede proporcionar una reconstrucción mejor que una combinación degenerada de las mismas.

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \int q(\Omega)q(\alpha_l) \log \left(\frac{q(\Omega)q(\alpha_l)}{p_l(\mathbf{y}, \Omega, \alpha_l)} \right) d\Omega d\alpha_l = \\ \int q(\Phi) \log \left(\frac{q(\Omega)q(\alpha_l)}{p_l(\mathbf{y}, \Omega, \alpha_l)} \right) d\Phi, \end{aligned} \quad (4.10)$$

y la Ec. (4.5), la Ec. (4.7) puede escribirse de una forma más compacta como:

$$\hat{q}(\Phi) = \underset{q(\Phi)}{\operatorname{argmin}} \mathcal{R}(\Phi) \quad (4.11)$$

donde

$$\mathcal{R}(\Phi) = \int q(\Phi) \log \left(\frac{q(\Omega)}{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \{\beta_k\}) \prod_{k=1}^L p(\beta_k)} \prod_{l=1}^m \left[\frac{q(\alpha_l)}{p_l(\mathbf{x}|\alpha_l)p(\alpha_l)} \right]^{\lambda_l} \right) d\Phi. \quad (4.12)$$

En esta memoria queremos estudiar dos tipos de combinaciones de modelos a priori. Por un lado, estudiaremos la combinación del modelo a priori SAR con el modelo a priori basado en la norma ℓ_1 y por otra la del modelo SAR con el modelo a priori TV. Llamaremos a esta dos configuraciones objeto de estudio Φ_c para $c \in \{\ell_1, TV\}$. En ambos casos $m = 3$, pero en el primero de ellos Φ_{ℓ_1} , tenemos $\boldsymbol{\lambda}_{\ell_1} = \{1 - \lambda_2, \lambda_2, 0\}$, y el segundo caso Φ_{TV} tendremos $\boldsymbol{\lambda}_{TV} = \{1 - \lambda_3, 0, \lambda_3\}$.

Desafortunadamente, la Ec. (4.11) no puede ser resuelta directamente debido a los modelos a priori $p_l(\mathbf{x}|\alpha_l)$ para $l = 2, 3$, definidos en las Ecs. (3.2) y (4.6) respectivamente. Este problema ya lo encontramos en el capítulo anterior al estudiar el modelo a priori ℓ_1 y lo salvamos, de forma análoga a como se hizo para el caso del modelo TV en Babacan et al. (2011), aplicando una técnica de mayorización, como en Bioucas-Dias et al. (2006). En el capítulo anterior se encontró una cota inferior a $p_2(\mathbf{x}|\alpha_2)$, $M(\alpha_2^h, \alpha_2^v, \mathbf{x}, \mathbf{w}_2^h, \mathbf{w}_2^v)$, definida en la Ec. (3.26), en términos de los parámetros $\mathbf{w}_2^h$ y $\mathbf{w}_2^v$ que también se estimaron en el capítulo anterior, y a los que se dió una interpretación dentro del modelo como indicadores de la presencia de bordes a través de la imagen de AR.

Para el caso del modelo TV, también se propuso, en Babacan et al. (2011), una cota inferior a la distribución a priori

$$p_3(\mathbf{x}|\alpha_3) \geq M_3(\alpha_3, \mathbf{x}, \mathbf{w}_3), \quad (4.13)$$

siendo

$$M_3(\alpha_3, \mathbf{x}, \mathbf{w}_3) = (\alpha_3)^{\frac{PN}{2}} \times \exp \left\{ -\frac{\alpha_3}{2} \sum_{i=1}^{PN} \left[\frac{(\Delta_i^h(\mathbf{x}))^2 + (\Delta_i^v(\mathbf{x}))^2 + w_{3i}}{\sqrt{w_{3i}}} \right] \right\}, \quad (4.14)$$

que también depende de un vector PN -dimensional definido positivo $\mathbf{w}_3 \in (R^+)^{PN}$, cuya componente i denotaremos por w_{3i} para $i = 1, 2, \dots, PN$. Al igual que $\mathbf{w}_2^h$ y $\mathbf{w}_2^v$, el parámetros $\mathbf{w}_3$ debe estimarse y tiene un significado relacionado con la presencia de bordes en la imagen de AR.

La sustitución en la Ec. (4.12) de las distribuciones a priori $p_l(\mathbf{x}|\alpha_l)$, para $l = 2, 3$, por sus correspondientes cotas inferiores, permitirá, como ya se explicó en el capítulo anterior para el modelo $\ell 1$, y como se describe en Babacan et al. (2011), para el modelo TV, encontrar una cota superior a $\mathcal{R}(\Phi)$ de la Ec. (4.12), que permite, como también hemos estudiado en el capítulo anterior, resolver la minimización de las divergencias de KL, es decir, resolver la Ec. (4.11), minimizando iterativamente, y de forma alternativa, con respecto a las nuevas variables introducidas, $\mathbf{w}_2^h$, $\mathbf{w}_2^v$ y $\mathbf{w}_3$, y con respecto al resto de las variables, estrechando cada vez más la cota y acercándonos a la solución exacta (ver Bioucas-Dias et al. (2006)).

La mayorización nos permitió también, en la Ec. (3.27) del capítulo anterior, encontrar una cota superior $\mathbf{F}(\Theta_2, \mathbf{y}, \mathbf{w}_2^h, \mathbf{w}_2^v)$, a la distribución conjunta $p_2(\Omega, \alpha_2, \mathbf{y})$. De igual modo, puede encontrarse la siguiente cota superior para la distribución conjunta del modelo TV,

$$\begin{aligned} p_3(\Omega, \alpha_3, \mathbf{y}) &\geq p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \{\beta_k\}) M_3(\alpha_3, \mathbf{x}, \mathbf{w}_3) p(\alpha_3) \prod_{k=1}^L p(\beta_k) \\ &= \mathbf{F}_3(\Omega, \alpha_3, \mathbf{y}, \mathbf{w}_3). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ahora ya estamos en condiciones de abordar la minimización de la Ec. (4.11). Para obtener las distintas distribuciones, observemos en primer lugar que para calcular las distribuciones $q(\alpha_l)$, para $l = 1, 2, 3$, sólo debemos fijarnos en la divergencia en donde estén presentes. Así obtenemos

$$q(\alpha_1) = \text{const} \times \exp \left(\langle \log p_1(\Omega, \alpha_1, \mathbf{y}) \rangle_{q(\Omega)} \right), \quad (4.16)$$

$$q(\alpha_2) = \text{const} \times \exp \left(\left\langle \log \mathbf{F}(\Theta_2, \mathbf{y}, \mathbf{w}_2^h, \mathbf{w}_2^v) \right\rangle_{q(\Omega)} \right), \quad (4.17)$$

y

$$q(\alpha_3) = \text{const} \times \exp \left(\langle \log \mathbf{F}_3(\Omega, \alpha_3, \mathbf{y}, \mathbf{w}_3) \rangle_{q(\Omega)} \right) \quad (4.18)$$

donde $\langle \cdot \rangle_{q(\Omega)} = E_{q(\Omega)}[\cdot]$. Para ayudar a su legibilidad omitiremos el subíndice que referencia la distribución para el valor esperado.

Para evaluar el resto de las distribuciones de los parámetros desconocidos $q(\xi)$ con $\xi \in \Omega$ debemos utilizar todas las divergencias, obteniendo para la configuración $c = \ell 1$, de mezcla entre los modelos SAR y $\ell 1$,

$$q_{\ell 1}(\xi) = \text{const} \times \exp \left(\left\langle \log \left[p(\mathbf{y}|\Omega) \prod_{k=1}^L p(\beta_k) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left[M(\alpha_2^h, \alpha_2^v, \mathbf{x}, \mathbf{w}_2^h, \mathbf{w}_2^v) p(\alpha_2) \right]^{\lambda_2} [p_1(\mathbf{x}|\alpha_1) p(\alpha_1)]^{1-\lambda_2} \right] \right\rangle_{q(\Phi_{\ell 1 \xi})} \right), \quad (4.19)$$

y para la configuración $c = TV$, de la mezcla entre los modelos SAR y TV,

$$q_{TV}(\xi) = \text{const} \times \exp \left(\left\langle \log \left[p(\mathbf{y}|\Omega) \prod_{k=1}^L p(\beta_k) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left[M_3(\alpha_3, \mathbf{x}, \mathbf{w}_3) p(\alpha_3) \right]^{\lambda_3} [p_1(\mathbf{x}|\alpha_1) p(\alpha_1)]^{1-\lambda_3} \right] \right\rangle_{q(\Phi_{TV \xi})} \right), \quad (4.20)$$

donde $\Phi_{c\xi}$, para $c \in \{\ell 1, TV\}$, denota el conjunto de variables Φ_c habiendo eliminado ξ .

4.3.1. Estimación de la Imagen de Alta Resolución

Para obtener la función de distribución $q(\mathbf{x})$ partiremos de la Ec. (4.19) para $c = \ell 1$, resultando una distribución Gaussiana multivariante de la forma:

$$q_{\ell 1}(\mathbf{x}) \propto \exp \left(-\frac{1}{2} \lambda_2 \left\{ \langle \alpha_2^h \rangle \sum_i \frac{(\Delta_i^h(\mathbf{x}))^2 + w_{2i}^h}{\sqrt{w_{2i}^h}} \right. \right. \\ \left. \left. + \langle \alpha_2^v \rangle \sum_i \frac{(\Delta_i^v(\mathbf{x}))^2 + w_{2i}^v}{\sqrt{w_{2i}^v}} \right\} - \frac{(1 - \lambda_2)}{2} \langle \alpha_1 \rangle \|\mathcal{C}\mathbf{x}\|^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_k \langle \beta_k \rangle \|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}\|^2 \right), \quad (4.21)$$

y de la Ec. (4.20) para $c = TV$,

$$\begin{aligned}
q_{TV}(\mathbf{x}) \propto \exp & \left(-\frac{1}{2} \langle \alpha_3 \rangle \lambda_3 \sum_i \frac{(\Delta_i^h(\mathbf{x}))^2 + (\Delta_i^v(\mathbf{x}))^2 + w_{3i}}{\sqrt{w_{3i}}} \right. \\
& - \frac{(1 - \lambda_3)}{2} \langle \alpha_1 \rangle \|\mathcal{C}\mathbf{x}\|^2 \\
& \left. - \frac{1}{2} \sum_k \langle \beta_k \rangle \|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}\|^2 \right). \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Estas distribuciones presentan la siguientes matrices de covarianzas inversas:

$$\begin{aligned}
\text{cov}_{q_{\ell 1}(\mathbf{x})}^{-1}[\mathbf{x}] &= \sum_{k=1}^L \langle \beta_k \rangle \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)^t \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k) \\
&+ \lambda_2 \left(\langle \alpha_2^h \rangle \Delta^h{}^t \mathbf{W}(\mathbf{w}_2^h) \Delta^h + \langle \alpha_2^v \rangle \Delta^v{}^t \mathbf{W}(\mathbf{w}_2^v) \Delta^v \right) \\
&+ (1 - \lambda_2) \langle \alpha_1 \rangle \mathcal{C}^t \mathcal{C}, \quad (4.23)
\end{aligned}$$

para el caso de $c = \ell 1$ y

$$\begin{aligned}
\text{cov}_{q_{TV}(\mathbf{x})}^{-1}[\mathbf{x}] &= \sum_{k=1}^L \langle \beta_k \rangle \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)^t \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k) \\
&+ \lambda_3 \langle \alpha_3 \rangle \left(\Delta^h{}^t \mathbf{W}(\mathbf{w}_3) \Delta^h + \Delta^v{}^t \mathbf{W}(\mathbf{w}_3) \Delta^v \right) \\
&+ (1 - \lambda_2) \langle \alpha_1 \rangle \mathcal{C}^t \mathcal{C}, \quad (4.24)
\end{aligned}$$

para $c = TV$.

La imagen de AR estimada $E_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]$ viene dada por

$$E_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}] = \text{cov}_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}] \sum_{k=1}^L \langle \beta_k \rangle \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)^t \mathbf{y}_k. \quad (4.25)$$

Tanto en la Ec. (4.23) como en la Ec. (4.24) Δ^h y Δ^v representan matrices de convolución de $PN \times PN$ asociadas respectivamente con las diferencias en horizontal y en vertical de primer orden, y $\mathbf{W}(\mathbf{w})$ con $\forall \mathbf{w} \in (R^+)^{PN}$ define una matriz diagonal de $PN \times PN$ tal que

$$\mathbf{W}(\mathbf{w})_{ii} = \frac{1}{\sqrt{w_i}} \text{ para } i = 1, \dots, PN. \quad (4.26)$$

Las matrices $\mathbf{W}(\mathbf{w}_3)$, $\mathbf{W}(\mathbf{w}_2^h)$ y $\mathbf{W}(\mathbf{w}_2^v)$ se interpretan como matrices de adaptación espacial ya que el suavizado horizontal y vertical para cada pixel depende de la fuerza con la que varíen los gradientes horizontal y vertical.

La estimación de los parámetros $\mathbf{w}_2^h$ y $\mathbf{w}_2^v$, para el modelo $\ell 1$ ya se estudió en el apartado 3.5.1 obteniéndose

$$w_{2i}^h = \mathbb{E}_{q_{\ell 1}(\mathbf{x})}[(\Delta_i^h(\mathbf{x}))^2] = (\Delta_i^h(\mathbb{E}_{q_{\ell 1}(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]))^2 + \text{traza}(\text{cov}_{q_{\ell 1}(\mathbf{x})}[\mathbf{x}] \Delta^{h^t} \delta_i \Delta^h) \quad (4.27)$$

y

$$w_{2i}^v = \mathbb{E}_{q_{\ell 1}(\mathbf{x})}[(\Delta_i^v(\mathbf{x}))^2] = (\Delta_i^v(\mathbb{E}_{q_{\ell 1}(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]))^2 + \text{traza}(\text{cov}_{q_{\ell 1}(\mathbf{x})}[\mathbf{x}] \Delta^{v^t} \delta_i \Delta^v) \quad (4.28)$$

La estimación del parámetro $\mathbf{w}_3$ del modelo TV sigue los mismos pasos, está descrito en Babacan et al. (2011), y finalmente, resulta

$$\begin{aligned} w_{3i} &= \mathbb{E}_{q_{TV}(\mathbf{x})}[(\Delta_i^h(\mathbf{x}))^2 + \Delta_i^v(\mathbf{x}))^2] \\ &= (\Delta_i^h(\mathbb{E}_{q_{TV}(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]))^2 + (\Delta_i^v(\mathbb{E}_{q_{TV}(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]))^2 \\ &\quad + \text{traza}(\text{cov}_{q_{TV}(\mathbf{x})}[\mathbf{x}] \Delta^{h^t} \delta_i \Delta^h) \\ &\quad + \text{traza}(\text{cov}_{q_{TV}(\mathbf{x})}[\mathbf{x}] \Delta^{v^t} \delta_i \Delta^v). \end{aligned} \quad (4.29)$$

4.3.2. Estimación de los Hiperparámetros

Por último nos queda obtener las distribuciones para los hiperparámetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \{\beta_k\}$ para $c \in \{\ell 1, TV\}$. A partir de las Ecs. (4.16), (4.17) y (4.18) encontramos que las distribuciones de los hiperparámetros son distribuciones Gamma, expresadas como

$$q(\alpha_1) \propto \alpha_1^{\frac{PN}{2}-1+a_{\alpha_1}^0} \exp \left[-\alpha_1 \left(b_{\alpha_1}^0 + \frac{\mathbb{E}_{q_c(\mathbf{x})}[\|\mathcal{C}\mathbf{x}\|^2]}{2} \right) \right], \quad (4.30)$$

los hiperparámetros $\{\beta_k\}$ tienen como distribuciones:

$$q(\beta_k) \propto \beta_k^{\frac{N}{2}-1+a_{\beta_k}^0} \exp \left[-\beta_k \left(b_{\beta_k}^0 + \frac{\mathbb{E}_{q_c(\mathbf{x})}[\|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}\|^2]}{2} \right) \right]. \quad (4.31)$$

En el caso de $c = \ell 1$ las distribuciones de los hiperparámetros α_2^h y α_2^v son

$$q(\alpha_2^h) \propto (\alpha_2^h)^{\frac{PN}{4}-1+a_{\alpha_2^h}^0} \exp \left[-\alpha_2^h \left(b_{\alpha_2^h}^0 + \sum_{i=1}^{PN} \sqrt{w_{2i}^h} \right) \right], \quad (4.32)$$

y

$$q(\alpha_2^v) \propto (\alpha_2^v)^{\frac{PN}{4}-1+a_{\alpha_2^v}^0} \exp \left[-\alpha_2^v \left(b_{\alpha_2^v}^0 + \sum_{i=1}^{PN} \sqrt{w_{2i}^v} \right) \right]. \quad (4.33)$$

Y en el caso de $c = TV$ la distribución para el hiperparámetros α_3 es

$$q(\alpha_3) \propto (\alpha_3)^{\frac{PN}{2}-1+a_{\alpha_3}^0} \exp \left[-\alpha_3 \left(b_{\alpha_3}^0 + \sum_{i=1}^{PN} \sqrt{w_{3i}} \right) \right]. \quad (4.34)$$

Por tanto, las estimaciones de los hiperparámetros serán de la forma:

$$\langle \alpha_1 \rangle = \frac{PN + 2a_{\alpha_1}^0}{\|\mathcal{C}E_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]\|^2 + \text{traza}(\text{cov}_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]\mathcal{C}^t\mathcal{C}) + 2b_{\alpha_1}^0}, \quad (4.35)$$

$$\langle \beta_k \rangle = \frac{\frac{N}{2} + a_{\beta_k}^0}{\frac{1}{2} \left(\|y_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)E_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]\|^2 + \text{traza}(\text{cov}_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]\mathbf{B}_k^t(\mathbf{s}_k)\mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)) \right) + b_{\beta_k}^0}. \quad (4.36)$$

Cuando $c = \ell 1$

$$\langle \alpha_2^h \rangle = \frac{\frac{PN}{4} + a_{\alpha_2^h}^0}{\sum_{i=1}^{PN} \sqrt{w_{2i}^h} + b_{\alpha_2^h}^0}, \quad (4.37)$$

y

$$\langle \alpha_2^v \rangle = \frac{\frac{PN}{4} + a_{\alpha_2^v}^0}{\sum_{i=1}^{PN} \sqrt{w_{2i}^v} + b_{\alpha_2^v}^0}, \quad (4.38)$$

y para $c = TV$

$$\langle \alpha_3 \rangle = \frac{\frac{PN}{2} + a_{\alpha_3}^0}{\sum_{i=1}^{PN} \sqrt{w_{3i}} + b_{\alpha_3}^0}. \quad (4.39)$$

4.3.3. Método de Superresolución

La estimación de la imagen de AR junto con los hiperparámetros descrita en las secciones anteriores quedan recogidas en el algoritmo 4.1, para la mezcla del modelo SAR con el modelo norma $\ell 1$, y en el algoritmo 4.2 en el caso que se mezclen el modelo SAR con el modelo TV.

Algoritmo 4.1 SR usando la combinación de modelos SAR y ℓ_1 .

Entrada: Valores iniciales para la imagen de AR y hiperparámetros.

- 1: **mientras** no se alcance el criterio de convergencia **hacer**
 - 2: Estimar la distribución de la imagen de AR mediante la Ec. (4.19).
 - 3: Calcular los vectores de adaptabilidad $\mathbf{w}^h$ y $\mathbf{w}^v$ usando las Ecs. (4.27) y (4.28).
 - 4: Estimar la distribuciones de los hiperparámetros α_1 , $\{\beta_k\}$ y α_2 usando las Ecs. (4.35), (4.36), (4.37), (4.38).
 - 5: **fin mientras**
-

Algoritmo 4.2 SR usando la combinación de modelos SAR y TV

Entrada: Valores iniciales para la imagen de AR y hiperparámetros.

- 1: **mientras** no se alcance el criterio de convergencia **hacer**
 - 2: Estimar la distribución de la imagen de AR mediante la Ec. (4.20)
 - 3: Calcular el vector de adaptabilidad $\mathbf{w}$ usando la Ec. (4.29).
 - 4: Estimar la distribuciones de los hiperparámetros α_1 , $\{\beta_k\}$ y α_3 usando las Ecs. (4.35), (4.36) y (4.39).
 - 5: **fin mientras**
-

4.4. Experimentos

Para los experimentos presentados en este capítulo se utilizará el mismo conjunto de 8 imágenes usado en el apartado 3.7 del capítulo anterior (ver la figura 3.2). Se proponen dos experimentos, uno con 5 observaciones y con factor de magnificación $\sqrt{P} = 2$ y otro con 11 observaciones con factor de magnificación $\sqrt{P} = 4$. En ambos experimentos las observaciones son generadas igual que en el apartado 3.7, aplicando el mismo modelo de degradación descrito en el apartado 3.2.2, con la misma PSF uniforme, vectores de movimiento y niveles de ruido Gaussiano, y repitiendo los experimentos 10 veces para mostrar la robustez al ruido de los métodos AR estudiados.

En ambos experimentos se compararán las imágenes de AR estimadas con los métodos: interpolación bilineal denotado (BBC), el método robusto Zomet et al. (2001) basado en un algoritmo Back-Projection con valor 3 para la mediana de filtrado y denotado por(ZMT), el método de SR robusto propuesto en Farsiu et al. (Oct. 2004) que denotamos como (RSR) y basado en el modelo a priori TV bilateral, el método de SR variacional en Babacan et al. (2011) basado en el modelo a priori TV que denotaremos por (TV), el algoritmo de SR 3.1 basado en el modelo a priori SAR que notaremos como (SAR), el algoritmo de SR 3.2 propuesto en Villena et al. (2009a) denotado como (norma ℓ_1), el algoritmo de SR 4.1 con $c = \ell_1$ propuesto en Villena et al. (2010c) y Villena et al. (2010b) basado en la combinación de modelos a priori SAR y la norma ℓ_1 y denotado como(norma ℓ_1 -SAR) y por último el algoritmo de SR 4.2 con $c = TV$ propuesto en Villena et al. (2010a)

denotado por (TV-SAR) y basado en la combinación de modelos a priori SAR y TV. Los valores de los parámetros de mezcla λ_2 en el algoritmo 4.1, y λ_3 en el algoritmo 4.2 se han obtenido numéricamente, probando valores desde 0 hasta 1 en incrementos de 0,05. Observe que los algoritmos 4.1 y 4.2 coinciden con el método de SR de los algoritmos 3.2 y el TV cuando $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 1$ respectivamente. Igualmente, cuando $\lambda_2 = 0$ o $\lambda_3 = 0$ los algoritmos coinciden con el resultado obtenido por el algoritmo 3.1. Como en el capítulo anterior utilizaremos el PSNR definido en la Ec. (3.63) para comparar la calidad de las imágenes estimadas. En todos los casos utilizaremos el mismo criterio de parada que en el capítulo anterior, Ec. (3.64). En todos los casos hemos aplicado la aproximación de Jacobi para la estimación de los hiperparámetros en vez de la aproximación circulante utilizada en el capítulo anterior, dada la gran cantidad de ejecuciones necesarias, para distintos valores de los parámetros de mezcla, porque esta aproximación da buenos resultados y es más eficiente.

En las tablas 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4 se muestran los valores medios del PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones. Para facilitar su examen se han rotulado en color verde los resultados de la combinación de modelos cuando sean mejores que los modelos por separado, y en rojo cuando, además, el resultado sea el mejor de todos. Por el contrario, cuando el mejor resultado haya sido obtenido utilizando un único modelo a priori lo rotulamos en color azul.

Puede comprobarse que, en general, las reconstrucciones obtenidas mediante la combinación de modelos, propuesta en esta memoria, son mejores que las obtenidas mediante el resto de los métodos comparados.

En las figuras 4.1 y 4.2 se muestran para la imagen 3.2(a) las reconstrucciones de AR obtenidas con los diferentes métodos de SR estudiados y las diferencias absolutas entre las reconstrucciones de AR y la imagen original, representada en escala de color (las diferencias próximas a cero aparecen en azul oscuro y en rojo las diferencias grandes), respectivamente. Y en la figura 4.3 se representa la variación de la calidad de la imagen de AR obtenida mediante la combinación de modelos para distintos valores del parámetro de mezcla. De modo similar las figuras 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7, 4.8, 4.9 muestran las reconstrucciones de AR, las diferencias entre las reconstrucciones de AR y la imagen original y las variaciones de la calidad de la reconstrucción usando la combinación de modelos para las imágenes 3.2(e) y 3.2(b), respectivamente.

Por último en las tablas 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8 se muestran los valores medios del PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 11 observaciones.

Tabla 4.1: Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones para los niveles de ruido entre 10db y 20db

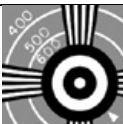
Imagen $\mathbf{x}$	Algoritmo	SNR 10db	SNR 15db	SNR 20db
a 	BBC	$23.03 \pm 4.2\text{e-}03$	$23.04 \pm 6.6\text{e-}04$	$23.04 \pm 4.8\text{e-}04$
	RSR	$32.10 \pm 7.7\text{e-}03$	$31.93 \pm 6.1\text{e-}02$	$31.86 \pm 4.9\text{e-}02$
	ZMT	$23.56 \pm 4.9\text{e-}03$	$23.56 \pm 2.1\text{e-}03$	$23.56 \pm 5.0\text{e-}04$
	SAR	$29.71 \pm 4.1\text{e-}03$	$33.74 \pm 1.7\text{e-}02$	$37.45 \pm 5.2\text{e-}02$
	TV	$32.92 \pm 5.4\text{e-}02$	$36.95 \pm 6.7\text{e-}02$	$41.00 \pm 7.3\text{e-}02$
	norm ℓ_1	$33.86 \pm 3.9\text{e-}02$	$38.02 \pm 5.4\text{e-}02$	$42.09 \pm 3.9\text{e-}02$
	TV-SAR	$33.07 \pm 5.0\text{e-}02$	$37.08 \pm 2.7\text{e-}02$	$41.12 \pm 6.3\text{e-}02$
		$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.95$
	norm ℓ_1 -SAR	$33.86 \pm 3.9\text{e-}02$	$38.05 \pm 5.0\text{e-}02$	$42.15 \pm 4.6\text{e-}02$
		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.95$
b 	BBC	$16.37 \pm 7.0\text{e-}03$	$16.38 \pm 1.1\text{e-}03$	$16.38 \pm 4.8\text{e-}04$
	RSR	$29.34 \pm 4.0\text{e-}02$	$30.87 \pm 2.0\text{e-}01$	$30.80 \pm 3.1\text{e-}03$
	ZMT	$19.56 \pm 2.2\text{e+}00$	$19.43 \pm 2.2\text{e+}00$	$20.97 \pm 2.1\text{e+}00$
	SAR	$26.77 \pm 5.4\text{e-}02$	$30.17 \pm 1.8\text{e-}02$	$34.94 \pm 1.2\text{e-}01$
	TV	$29.24 \pm 7.4\text{e-}02$	$33.73 \pm 9.8\text{e-}02$	$38.24 \pm 2.6\text{e-}02$
	norm ℓ_1	$29.62 \pm 8.3\text{e-}02$	$34.29 \pm 1.5\text{e-}01$	$38.81 \pm 1.1\text{e-}01$
	TV-SAR	$30.01 \pm 1.2\text{e-}01$	$34.48 \pm 1.7\text{e-}02$	$38.77 \pm 6.2\text{e-}02$
		$\lambda = 0.80$	$\lambda = 0.85$	$\lambda = 0.85$
	norm ℓ_1 -SAR	$29.79 \pm 9.9\text{e-}02$	$34.62 \pm 6.6\text{e-}02$	$39.13 \pm 9.9\text{e-}02$
		$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.90$	$\lambda = 0.90$
c 	BBC	$24.72 \pm 6.2\text{e-}03$	$24.74 \pm 6.8\text{e-}04$	$24.74 \pm 1.9\text{e-}04$
	RSR	$32.87 \pm 7.9\text{e-}02$	$33.54 \pm 3.6\text{e-}02$	$33.55 \pm 1.4\text{e-}02$
	ZMT	$25.88 \pm 4.3\text{e-}03$	$25.88 \pm 3.0\text{e-}04$	$25.89 \pm 4.2\text{e-}05$
	SAR	$32.45 \pm 2.3\text{e-}02$	$34.92 \pm 1.0\text{e-}02$	$39.00 \pm 2.5\text{e-}02$
	TV	$33.47 \pm 6.2\text{e-}02$	$36.28 \pm 9.1\text{e-}02$	$39.71 \pm 2.9\text{e-}02$
	norm ℓ_1	$33.89 \pm 6.6\text{e-}02$	$36.35 \pm 8.5\text{e-}02$	$39.55 \pm 3.4\text{e-}02$
	TV-SAR	$34.38 \pm 4.7\text{e-}02$	$37.37 \pm 8.8\text{e-}02$	$40.71 \pm 2.9\text{e-}02$
		$\lambda = 0.85$	$\lambda = 0.85$	$\lambda = 0.85$
	norm ℓ_1 -SAR	$34.16 \pm 5.4\text{e-}02$	$37.37 \pm 8.9\text{e-}02$	$40.69 \pm 2.2\text{e-}02$
		$\lambda = 0.90$	$\lambda = 0.85$	$\lambda = 0.80$
d 	BBC	$16.44 \pm 7.4\text{e-}04$	$16.45 \pm 4.2\text{e-}04$	$16.45 \pm 2.9\text{e-}04$
	RSR	$26.87 \pm 1.2\text{e-}01$	$28.44 \pm 3.1\text{e-}02$	$28.37 \pm 2.1\text{e-}02$
	ZMT	$16.88 \pm 4.3\text{e-}04$	$16.88 \pm 2.2\text{e-}04$	$16.88 \pm 1.0\text{e-}04$
	SAR	$24.94 \pm 6.1\text{e-}02$	$27.43 \pm 5.2\text{e-}02$	$33.53 \pm 7.8\text{e-}02$
	TV	$29.57 \pm 1.6\text{e-}01$	$34.95 \pm 2.6\text{e-}01$	$41.22 \pm 1.7\text{e-}01$
	norm ℓ_1	$30.59 \pm 2.3\text{e-}01$	$36.48 \pm 1.6\text{e-}01$	$42.35 \pm 1.3\text{e-}01$
	TV-SAR	$29.57 \pm 1.6\text{e-}01$	$34.98 \pm 3.0\text{e-}01$	$41.22 \pm 1.7\text{e-}01$
		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$
	norm ℓ_1 -SAR	$30.59 \pm 2.3\text{e-}01$	$36.48 \pm 1.6\text{e-}01$	$42.35 \pm 1.3\text{e-}01$
		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$

Tabla 4.2: Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones para los niveles de ruido entre 10db y 20db

Imagen $\mathbf{x}$	Algoritmo	SNR 10db	SNR 15db	SNR 20db
e 	BBC	$25.33 \pm 2.2\text{e-}03$	$25.33 \pm 8.9\text{e-}04$	$25.33 \pm 4.1\text{e-}04$
	RSR	$31.36 \pm 5.7\text{e-}02$	$31.14 \pm 6.3\text{e-}02$	$30.99 \pm 2.1\text{e-}02$
	ZMT	$26.71 \pm 1.5\text{e+}00$	$26.70 \pm 1.4\text{e+}00$	$25.72 \pm 5.7\text{e-}03$
	SAR	$32.00 \pm 4.1\text{e-}02$	$36.21 \pm 2.7\text{e-}02$	$40.71 \pm 8.0\text{e-}02$
	TV	$33.71 \pm 4.3\text{e-}02$	$37.24 \pm 2.9\text{e-}02$	$41.95 \pm 1.4\text{e-}01$
	norm ℓ_1	$33.55 \pm 3.6\text{e-}02$	$36.88 \pm 5.4\text{e-}02$	$41.63 \pm 1.3\text{e-}01$
	TV-SAR	$33.97 \pm 3.4\text{e-}02$	$37.48 \pm 3.5\text{e-}02$	$42.05 \pm 1.4\text{e-}01$
	$\lambda = 0.90$		$\lambda = 0.90$	$\lambda = 0.90$
	norm ℓ_1 -SAR	$33.89 \pm 3.2\text{e-}02$	$37.39 \pm 4.7\text{e-}02$	$41.92 \pm 1.4\text{e-}01$
f 	BBC	$24.45 \pm 1.9\text{e-}03$	$24.45 \pm 6.4\text{e-}04$	$24.45 \pm 2.7\text{e-}04$
	RSR	$31.33 \pm 1.9\text{e-}02$	$31.26 \pm 4.2\text{e-}02$	$31.30 \pm 2.0\text{e-}02$
	ZMT	$24.67 \pm 5.5\text{e-}04$	$24.66 \pm 2.5\text{e-}04$	$24.66 \pm 6.5\text{e-}05$
	SAR	$33.42 \pm 3.5\text{e-}02$	$36.27 \pm 3.5\text{e-}02$	$41.98 \pm 9.0\text{e-}02$
	TV	$34.21 \pm 4.3\text{e-}02$	$37.76 \pm 2.6\text{e-}02$	$42.74 \pm 1.5\text{e-}01$
	norm ℓ_1	$34.09 \pm 3.3\text{e-}02$	$37.50 \pm 4.8\text{e-}02$	$42.57 \pm 1.4\text{e-}01$
	TV-SAR	$34.49 \pm 3.9\text{e-}02$	$38.02 \pm 2.4\text{e-}02$	$42.85 \pm 1.5\text{e-}01$
	$\lambda = 0.90$		$\lambda = 0.85$	$\lambda = 0.90$
	norm ℓ_1 -SAR	$34.43 \pm 4.3\text{e-}02$	$37.94 \pm 2.4\text{e-}02$	$42.80 \pm 1.5\text{e-}01$
g 	BBC	$24.54 \pm 3.5\text{e-}03$	$24.55 \pm 1.1\text{e-}03$	$24.56 \pm 5.7\text{e-}04$
	RSR	$32.40 \pm 4.7\text{e-}02$	$33.40 \pm 6.5\text{e-}02$	$33.25 \pm 5.4\text{e-}02$
	ZMT	$25.52 \pm 2.6\text{e-}03$	$25.52 \pm 5.7\text{e-}04$	$25.52 \pm 3.8\text{e-}04$
	SAR	$32.74 \pm 1.5\text{e-}02$	$35.45 \pm 1.7\text{e-}02$	$40.51 \pm 3.6\text{e-}02$
	TV	$33.54 \pm 6.2\text{e-}02$	$37.32 \pm 1.9\text{e-}02$	$41.44 \pm 8.7\text{e-}03$
	norm ℓ_1	$34.11 \pm 1.8\text{e-}02$	$37.95 \pm 3.8\text{e-}02$	$41.90 \pm 6.1\text{e-}02$
	TV-SAR	$34.25 \pm 5.1\text{e-}02$	$37.97 \pm 2.3\text{e-}02$	$42.19 \pm 1.9\text{e-}02$
	$\lambda = 0.80$		$\lambda = 0.85$	$\lambda = 0.80$
	norm ℓ_1 -SAR	$34.22 \pm 3.0\text{e-}02$	$38.22 \pm 4.6\text{e-}02$	$42.47 \pm 8.9\text{e-}03$
h 	BBC	$25.03 \pm 1.2\text{e-}02$	$25.08 \pm 1.2\text{e-}03$	$25.08 \pm 8.3\text{e-}04$
	RSR	$29.98 \pm 4.0\text{e-}02$	$32.53 \pm 4.7\text{e-}02$	$32.22 \pm 3.4\text{e-}02$
	ZMT	$26.61 \pm 9.0\text{e-}01$	$25.70 \pm 3.1\text{e-}02$	$25.65 \pm 3.5\text{e-}03$
	SAR	$30.10 \pm 8.0\text{e-}03$	$31.30 \pm 1.3\text{e-}02$	$36.31 \pm 1.7\text{e-}02$
	TV	$32.03 \pm 2.2\text{e-}02$	$35.09 \pm 3.3\text{e-}02$	$38.55 \pm 1.5\text{e-}02$
	norm ℓ_1	$31.87 \pm 3.9\text{e-}03$	$35.35 \pm 4.2\text{e-}02$	$38.73 \pm 1.7\text{e-}02$
	TV-SAR	$32.05 \pm 2.3\text{e-}02$	$35.12 \pm 3.2\text{e-}02$	$38.59 \pm 1.9\text{e-}02$
	$\lambda = 0.95$		$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.95$
	norm ℓ_1 -SAR	$31.87 \pm 3.9\text{e-}03$	$35.35 \pm 4.2\text{e-}02$	$38.80 \pm 1.1\text{e-}02$
	$\lambda = 1.00$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 0.95$

Tabla 4.3: Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones para los niveles de ruido entre 25db y 40db

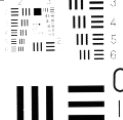
Imagen x	Algoritmo	SNR 25db	SNR 30db	SNR 40db
a 	BBC	$23.04 \pm 1.4e-04$	$23.04 \pm 6.3e-05$	$23.04 \pm 2.2e-06$
	RSR	$31.80 \pm 2.8e-02$	$31.81 \pm 2.3e-02$	$31.82 \pm 3.7e-02$
	ZMT	$23.56 \pm 2.2e-04$	$23.56 \pm 9.3e-05$	$23.56 \pm 1.8e-06$
	SAR	$43.42 \pm 2.8e-02$	$49.92 \pm 8.2e-02$	$62.55 \pm 1.7e-01$
	TV	$46.06 \pm 8.4e-02$	$52.73 \pm 4.4e-02$	$69.48 \pm 8.2e-02$
	norm ℓ_1	$47.18 \pm 6.9e-02$	$54.69 \pm 2.4e-02$	$72.82 \pm 7.0e-02$
	TV-SAR	$46.07 \pm 8.5e-02$	$52.73 \pm 4.4e-02$	$69.49 \pm 8.4e-02$
	$\lambda = 0.95$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$
	norm ℓ_1 -SAR	$47.18 \pm 6.9e-02$	$54.69 \pm 2.4e-02$	$72.82 \pm 7.0e-02$
b 	BBC	$16.38 \pm 3.2e-04$	$16.38 \pm 5.7e-05$	$16.38 \pm 4.5e-06$
	RSR	$30.73 \pm 1.9e-01$	$30.80 \pm 1.9e-01$	$30.75 \pm 1.6e-02$
	ZMT	$22.48 \pm 7.5e-04$	$22.48 \pm 2.9e-04$	$22.48 \pm 6.4e-05$
	SAR	$39.85 \pm 9.3e-02$	$47.17 \pm 2.8e-01$	$65.21 \pm 3.6e-01$
	TV	$43.48 \pm 8.3e-02$	$50.37 \pm 1.2e-01$	$66.83 \pm 6.9e-02$
	norm ℓ_1	$43.95 \pm 4.2e-02$	$50.56 \pm 1.5e-01$	$66.97 \pm 8.8e-02$
	TV-SAR	$43.66 \pm 2.8e-02$	$50.38 \pm 1.3e-01$	$66.83 \pm 6.5e-02$
	$\lambda = 0.90$		$\lambda = 0.95$	$\lambda = 1.00$
	norm ℓ_1 -SAR	$44.00 \pm 4.9e-02$	$50.56 \pm 1.5e-01$	$66.97 \pm 8.8e-02$
c 	BBC	$24.74 \pm 3.9e-04$	$24.74 \pm 6.0e-06$	$24.74 \pm 3.3e-06$
	RSR	$33.51 \pm 3.0e-02$	$33.52 \pm 1.4e-02$	$33.57 \pm 3.8e-02$
	ZMT	$25.89 \pm 1.0e-04$	$25.89 \pm 2.9e-05$	$25.89 \pm 3.9e-06$
	SAR	$43.73 \pm 8.5e-03$	$49.80 \pm 9.0e-02$	$66.91 \pm 2.0e-01$
	TV	$44.66 \pm 8.1e-02$	$50.75 \pm 5.7e-02$	$68.05 \pm 1.7e-01$
	norm ℓ_1	$44.49 \pm 6.1e-02$	$50.69 \pm 7.2e-02$	$68.18 \pm 1.3e-01$
	TV-SAR	$45.05 \pm 5.2e-02$	$50.86 \pm 4.6e-02$	$68.11 \pm 1.6e-01$
	$\lambda = 0.85$		$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.85$
	norm ℓ_1 -SAR	$44.99 \pm 3.9e-02$	$50.82 \pm 5.4e-02$	$68.20 \pm 1.4e-01$
d 	BBC	$16.45 \pm 1.8e-04$	$16.45 \pm 1.5e-05$	$16.45 \pm 7.4e-07$
	RSR	$28.35 \pm 3.3e-02$	$28.32 \pm 1.7e-02$	$28.37 \pm 2.4e-02$
	ZMT	$16.88 \pm 4.5e-05$	$16.88 \pm 1.6e-05$	$16.88 \pm 1.5e-06$
	SAR	$38.80 \pm 3.7e-03$	$45.84 \pm 9.0e-02$	$61.62 \pm 1.0e-01$
	TV	$48.54 \pm 1.6e-01$	$55.90 \pm 1.6e-01$	$70.66 \pm 1.7e-01$
	norm ℓ_1	$49.34 \pm 7.6e-02$	$56.88 \pm 1.9e-01$	$74.64 \pm 2.4e-02$
	TV-SAR	$48.54 \pm 1.6e-01$	$55.90 \pm 1.6e-01$	$70.71 \pm 2.2e-01$
	$\lambda = 1.00$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 0.95$
	norm ℓ_1 -SAR	$49.34 \pm 7.6e-02$	$56.88 \pm 1.9e-01$	$74.64 \pm 2.4e-02$
	$\lambda = 1.00$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$

Tabla 4.4: Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones para los niveles de ruido entre 25db y 40db

Imagen $\mathbf{x}$	Algoritmo	SNR 25db	SNR 30db	SNR 40db
e 	BBC	$25.33 \pm 2.4\text{e-}05$	$25.33 \pm 6.5\text{e-}06$	$25.33 \pm 2.4\text{e-}06$
	RSR	$30.95 \pm 3.0\text{e-}02$	$30.92 \pm 6.4\text{e-}03$	$30.92 \pm 1.3\text{e-}02$
	ZMT	$25.71 \pm 3.1\text{e-}03$	$25.71 \pm 8.3\text{e-}04$	$25.71 \pm 6.1\text{e-}05$
	SAR	$47.36 \pm 5.5\text{e-}02$	$55.78 \pm 1.1\text{e-}01$	$65.59 \pm 1.7\text{e-}02$
	TV	$48.38 \pm 8.7\text{e-}02$	$56.42 \pm 1.2\text{e-}01$	$73.50 \pm 3.4\text{e-}01$
	norm ℓ_1	$48.21 \pm 5.5\text{e-}02$	$56.40 \pm 1.3\text{e-}01$	$73.50 \pm 4.4\text{e-}01$
	TV-SAR	$48.38 \pm 8.7\text{e-}02$	$56.42 \pm 1.2\text{e-}01$	$73.81 \pm 4.4\text{e-}01$
	$\lambda = 1.00$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 0.95$
	norm ℓ_1 -SAR	$48.24 \pm 5.7\text{e-}02$	$56.40 \pm 1.2\text{e-}01$	$73.73 \pm 3.9\text{e-}01$
	$\lambda = 0.95$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 0.80$
f 	BBC	$24.45 \pm 6.7\text{e-}05$	$24.45 \pm 8.7\text{e-}06$	$24.45 \pm 6.1\text{e-}07$
	RSR	$31.31 \pm 1.1\text{e-}02$	$31.31 \pm 5.0\text{e-}02$	$31.28 \pm 1.3\text{e-}02$
	ZMT	$24.66 \pm 2.9\text{e-}06$	$24.66 \pm 4.1\text{e-}06$	$24.66 \pm 5.2\text{e-}07$
	SAR	$49.05 \pm 1.3\text{e-}01$	$57.90 \pm 7.8\text{e-}02$	$67.01 \pm 8.6\text{e-}01$
	TV	$49.56 \pm 1.4\text{e-}01$	$58.43 \pm 1.7\text{e-}01$	$76.27 \pm 2.7\text{e-}01$
	norm ℓ_1	$49.49 \pm 1.5\text{e-}01$	$58.43 \pm 1.7\text{e-}01$	$75.44 \pm 2.4\text{e-}01$
	TV-SAR	$49.61 \pm 1.4\text{e-}01$	$58.45 \pm 1.5\text{e-}01$	$76.40 \pm 1.9\text{e-}01$
	$\lambda = 0.90$		$\lambda = 0.85$	$\lambda = 0.70$
	norm ℓ_1 -SAR	$49.59 \pm 1.5\text{e-}01$	$58.45 \pm 1.5\text{e-}01$	$76.02 \pm 2.1\text{e-}01$
	$\lambda = 0.85$		$\lambda = 0.75$	$\lambda = 0.75$
g 	BBC	$24.55 \pm 3.5\text{e-}04$	$24.55 \pm 2.6\text{e-}05$	$24.55 \pm 3.5\text{e-}06$
	RSR	$33.29 \pm 1.6\text{e-}02$	$33.30 \pm 3.2\text{e-}02$	$33.21 \pm 1.6\text{e-}02$
	ZMT	$25.52 \pm 6.8\text{e-}05$	$25.52 \pm 3.0\text{e-}05$	$25.52 \pm 1.6\text{e-}06$
	SAR	$45.91 \pm 1.0\text{e-}01$	$51.52 \pm 3.5\text{e-}02$	$66.26 \pm 2.3\text{e-}01$
	TV	$46.32 \pm 7.9\text{e-}02$	$52.18 \pm 5.0\text{e-}02$	$68.26 \pm 5.0\text{e-}02$
	norm ℓ_1	$46.35 \pm 1.7\text{e-}01$	$52.05 \pm 2.3\text{e-}02$	$68.38 \pm 1.2\text{e-}01$
	TV-SAR	$46.94 \pm 1.1\text{e-}01$	$52.57 \pm 4.6\text{e-}02$	$68.33 \pm 6.1\text{e-}02$
	$\lambda = 0.80$		$\lambda = 0.80$	$\lambda = 0.90$
	norm ℓ_1 -SAR	$47.05 \pm 1.4\text{e-}01$	$52.53 \pm 4.1\text{e-}02$	$68.44 \pm 1.1\text{e-}01$
	$\lambda = 0.80$		$\lambda = 0.75$	$\lambda = 0.90$
h 	BBC	$25.08 \pm 5.4\text{e-}04$	$25.08 \pm 1.0\text{e-}04$	$25.08 \pm 1.8\text{e-}05$
	RSR	$32.24 \pm 2.4\text{e-}02$	$32.24 \pm 7.3\text{e-}03$	$32.24 \pm 1.2\text{e-}02$
	ZMT	$25.65 \pm 2.9\text{e-}04$	$25.65 \pm 4.7\text{e-}05$	$25.65 \pm 2.2\text{e-}05$
	SAR	$40.34 \pm 4.8\text{e-}02$	$46.34 \pm 3.6\text{e-}02$	$62.50 \pm 2.1\text{e-}01$
	TV	$42.67 \pm 6.4\text{e-}02$	$48.45 \pm 8.7\text{e-}02$	$64.59 \pm 1.2\text{e-}01$
	norm ℓ_1	$42.90 \pm 7.1\text{e-}02$	$48.75 \pm 1.0\text{e-}01$	$65.27 \pm 1.5\text{e-}01$
	TV-SAR	$42.67 \pm 6.4\text{e-}02$	$48.45 \pm 8.7\text{e-}02$	$64.59 \pm 1.2\text{e-}01$
	$\lambda = 1.00$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$
	norm ℓ_1 -SAR	$42.91 \pm 6.9\text{e-}02$	$48.75 \pm 1.0\text{e-}01$	$65.27 \pm 1.5\text{e-}01$
	$\lambda = 0.95$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$

Tabla 4.5: Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 11 observaciones para los niveles de ruido entre 10db y 20db

Imagen x	Algoritmo	SNR 10db	SNR 15db	SNR 20db
a 	BBC	$19.05 \pm 3.5e-03$	$19.06 \pm 1.6e-03$	$19.05 \pm 1.6e-04$
	RSR	$26.39 \pm 3.1e-02$	$26.91 \pm 5.1e-03$	$26.89 \pm 2.2e-02$
	ZMT	$22.40 \pm 4.1e-01$	$22.60 \pm 3.0e-01$	$22.78 \pm 1.8e-02$
	SAR	$25.72 \pm 2.2e-02$	$29.38 \pm 3.7e-02$	$30.16 \pm 5.0e-03$
	TV	$27.61 \pm 6.3e-02$	$31.47 \pm 5.2e-02$	$33.96 \pm 7.3e-02$
	norm ℓ_1	$27.72 \pm 3.1e-02$	$28.98 \pm 1.8e-02$	$29.31 \pm 2.0e-03$
	TV-SAR	$27.61 \pm 6.3e-02$	$31.47 \pm 5.2e-02$	$33.96 \pm 7.3e-02$
	$\lambda = 1.00$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$
	norm ℓ_1 -SAR	$27.72 \pm 3.1e-02$	$29.38 \pm 3.7e-02$	$30.16 \pm 5.0e-03$
b 	BBC	$12.72 \pm 3.6e-03$	$12.72 \pm 1.7e-03$	$12.72 \pm 1.7e-04$
	RSR	$17.30 \pm 2.1e-03$	$17.47 \pm 3.5e-03$	$17.49 \pm 2.5e-03$
	ZMT	$15.15 \pm 1.4e-02$	$15.16 \pm 2.9e-03$	$15.15 \pm 1.4e-03$
	SAR	$21.21 \pm 2.6e-02$	$21.73 \pm 4.2e-03$	$21.79 \pm 6.0e-03$
	TV	$23.09 \pm 8.7e-02$	$27.25 \pm 4.6e-02$	$30.32 \pm 7.1e-02$
	norm ℓ_1	$19.82 \pm 3.6e-02$	$20.19 \pm 1.4e-02$	$20.21 \pm 4.7e-03$
	TV-SAR	$23.09 \pm 8.7e-02$	$27.35 \pm 4.8e-02$	$30.48 \pm 9.7e-02$
	$\lambda = 1.00$		$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.95$
	norm ℓ_1 -SAR	$21.21 \pm 2.6e-02$	$21.73 \pm 4.2e-03$	$21.79 \pm 6.0e-03$
c 	BBC	$19.93 \pm 5.9e-03$	$19.94 \pm 8.4e-04$	$19.94 \pm 9.5e-04$
	RSR	$28.90 \pm 6.1e-03$	$29.89 \pm 1.7e-02$	$29.78 \pm 4.9e-02$
	ZMT	$25.15 \pm 1.1e+00$	$24.60 \pm 9.2e-01$	$23.78 \pm 2.0e-02$
	SAR	$28.58 \pm 9.7e-03$	$31.13 \pm 2.3e-02$	$32.95 \pm 1.8e-02$
	TV	$29.57 \pm 1.6e-02$	$32.00 \pm 4.5e-02$	$33.72 \pm 4.4e-02$
	norm ℓ_1	$29.76 \pm 4.1e-02$	$31.07 \pm 1.2e-02$	$31.38 \pm 1.2e-03$
	TV-SAR	$29.90 \pm 9.4e-03$	$32.46 \pm 2.4e-02$	$34.20 \pm 2.0e-02$
	$\lambda = 0.90$		$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.95$
	norm ℓ_1 -SAR	$29.76 \pm 3.9e-02$	$31.13 \pm 2.3e-02$	$32.95 \pm 1.8e-02$
d 	BBC	$13.37 \pm 2.4e-03$	$13.36 \pm 1.4e-03$	$13.36 \pm 1.1e-04$
	RSR	$19.63 \pm 4.8e-03$	$20.00 \pm 1.8e-03$	$20.02 \pm 1.3e-03$
	ZMT	$16.48 \pm 1.2e-02$	$16.46 \pm 3.1e-03$	$16.46 \pm 1.1e-04$
	SAR	$21.88 \pm 2.0e-02$	$22.71 \pm 7.3e-03$	$22.80 \pm 1.2e-03$
	TV	$25.71 \pm 9.5e-02$	$30.56 \pm 1.5e-01$	$34.90 \pm 6.5e-02$
	norm ℓ_1	$23.13 \pm 2.8e-02$	$24.24 \pm 1.4e-02$	$24.48 \pm 3.4e-03$
	TV-SAR	$25.71 \pm 9.5e-02$	$30.56 \pm 1.5e-01$	$34.90 \pm 6.5e-02$
	$\lambda = 1.00$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$
	norm ℓ_1 -SAR	$23.13 \pm 2.8e-02$	$24.24 \pm 1.4e-02$	$24.48 \pm 3.4e-03$
		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$

Tabla 4.6: Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 11 observaciones para los niveles de ruido entre 10db y 20db

Imagen x	Algoritmo	SNR 10db	SNR 15db	SNR 20db
e 	BBC	$21.36 \pm 1.4e-03$	$21.36 \pm 7.4e-04$	$21.36 \pm 4.5e-04$
	RSR	$28.19 \pm 4.1e-02$	$28.07 \pm 6.5e-02$	$28.00 \pm 5.0e-03$
	ZMT	$25.43 \pm 2.4e-03$	$25.43 \pm 3.3e-03$	$25.43 \pm 8.4e-04$
	SAR	$29.17 \pm 2.3e-02$	$30.78 \pm 1.9e-02$	$30.99 \pm 8.8e-03$
	TV	$29.31 \pm 2.5e-02$	$30.61 \pm 9.9e-03$	$31.02 \pm 2.4e-02$
	norm ℓ_1	$28.50 \pm 1.1e-02$	$28.69 \pm 3.6e-03$	$28.71 \pm 1.4e-03$
	TV-SAR	$29.31 \pm 2.5e-02$	$30.78 \pm 1.9e-02$	$31.02 \pm 2.4e-02$
	$\lambda = 1.00$		$\lambda = 0.00$	$\lambda = 1.00$
	norm ℓ_1 -SAR	$29.17 \pm 2.3e-02$	$30.78 \pm 1.9e-02$	$30.99 \pm 8.8e-03$
	$\lambda = 0.00$		$\lambda = 0.00$	$\lambda = 0.00$
f 	BBC	$19.89 \pm 1.1e-03$	$19.89 \pm 4.8e-04$	$19.89 \pm 1.2e-04$
	RSR	$28.02 \pm 4.8e-03$	$27.90 \pm 4.0e-02$	$27.89 \pm 5.1e-02$
	ZMT	$24.63 \pm 4.2e-03$	$24.62 \pm 5.5e-04$	$24.62 \pm 2.8e-04$
	SAR	$29.52 \pm 2.7e-02$	$30.20 \pm 1.1e-02$	$30.28 \pm 3.3e-03$
	TV	$29.86 \pm 7.3e-03$	$30.92 \pm 2.0e-02$	$31.21 \pm 1.9e-02$
	norm ℓ_1	$28.62 \pm 6.5e-03$	$28.76 \pm 4.4e-03$	$28.77 \pm 5.3e-04$
	TV-SAR	$29.86 \pm 7.3e-03$	$30.92 \pm 2.0e-02$	$31.21 \pm 1.9e-02$
	$\lambda = 1.00$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$
	norm ℓ_1 -SAR	$29.52 \pm 2.7e-02$	$30.20 \pm 1.1e-02$	$30.28 \pm 3.3e-03$
	$\lambda = 0.00$		$\lambda = 0.00$	$\lambda = 0.00$
g 	BBC	$18.94 \pm 5.2e-03$	$18.94 \pm 2.4e-03$	$18.94 \pm 4.7e-04$
	RSR	$28.95 \pm 2.0e-02$	$30.22 \pm 2.3e-02$	$30.20 \pm 9.1e-02$
	ZMT	$23.32 \pm 1.1e+00$	$25.09 \pm 7.8e-02$	$25.03 \pm 2.0e-02$
	SAR	$28.68 \pm 1.6e-02$	$32.03 \pm 5.6e-02$	$33.47 \pm 3.8e-03$
	TV	$29.88 \pm 4.1e-02$	$32.81 \pm 3.5e-02$	$35.10 \pm 4.5e-02$
	norm ℓ_1	$30.17 \pm 1.5e-02$	$31.84 \pm 1.9e-02$	$32.25 \pm 6.4e-03$
	TV-SAR	$30.18 \pm 3.5e-02$	$33.15 \pm 4.5e-02$	$35.24 \pm 5.6e-02$
	$\lambda = 0.90$		$\lambda = 0.90$	$\lambda = 0.95$
	norm ℓ_1 -SAR	$30.19 \pm 1.2e-02$	$32.03 \pm 5.6e-02$	$33.47 \pm 3.8e-03$
	$\lambda = 0.95$		$\lambda = 0.00$	$\lambda = 0.00$
h 	BBC	$20.75 \pm 1.6e-02$	$20.77 \pm 3.3e-03$	$20.77 \pm 1.5e-03$
	RSR	$27.60 \pm 4.5e-02$	$30.13 \pm 1.8e-02$	$30.10 \pm 1.1e-02$
	ZMT	$23.03 \pm 1.6e-02$	$23.04 \pm 2.2e-03$	$23.04 \pm 1.4e-04$
	SAR	$27.19 \pm 3.4e-02$	$28.34 \pm 4.6e-02$	$31.60 \pm 5.9e-03$
	TV	$28.65 \pm 1.7e-02$	$31.22 \pm 2.5e-02$	$33.41 \pm 4.5e-02$
	norm ℓ_1	$28.62 \pm 1.1e-02$	$30.76 \pm 2.6e-02$	$31.45 \pm 5.0e-03$
	TV-SAR	$28.65 \pm 1.7e-02$	$31.22 \pm 2.5e-02$	$33.41 \pm 4.5e-02$
	$\lambda = 1.00$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$
	norm ℓ_1 -SAR	$28.62 \pm 1.1e-02$	$30.76 \pm 2.6e-02$	$31.60 \pm 5.9e-03$
	$\lambda = 1.00$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 0.00$

Tabla 4.7: Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 11 observaciones para los niveles de ruido entre 25db y 40db

Imagen $\mathbf{x}$	Algoritmo	SNR 25db	SNR 30db	SNR 40db
a 	BBC	$19.06 \pm 1.4\text{e-}04$	$19.06 \pm 6.6\text{e-}05$	$19.06 \pm 1.6\text{e-}06$
	RSR	$26.85 \pm 3.0\text{e-}02$	$26.88 \pm 1.7\text{e-}02$	$26.90 \pm 6.4\text{e-}03$
	ZMT	$22.76 \pm 2.0\text{e-}03$	$22.73 \pm 1.0\text{e-}02$	$22.74 \pm 5.5\text{e-}04$
	SAR	$30.25 \pm 4.3\text{e-}03$	$30.26 \pm 1.3\text{e-}03$	$30.28 \pm 9.6\text{e-}03$
	TV	$34.82 \pm 2.6\text{e-}02$	$34.94 \pm 8.2\text{e-}02$	$34.96 \pm 4.3\text{e-}02$
	norm ℓ_1	$29.36 \pm 4.1\text{e-}03$	$29.36 \pm 5.4\text{e-}04$	$29.36 \pm 2.4\text{e-}04$
	TV-SAR	$34.82 \pm 2.6\text{e-}02$	$34.94 \pm 8.2\text{e-}02$	$34.96 \pm 4.3\text{e-}02$
	$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$
	norm ℓ_1 -SAR	$30.25 \pm 4.3\text{e-}03$	$30.26 \pm 1.3\text{e-}03$	$30.28 \pm 9.6\text{e-}03$
	$\lambda = 0.00$	$\lambda = 0.00$	$\lambda = 0.00$	$\lambda = 0.00$
b 	BBC	$12.72 \pm 5.6\text{e-}05$	$12.72 \pm 9.0\text{e-}06$	$12.72 \pm 2.8\text{e-}06$
	RSR	$17.49 \pm 1.9\text{e-}04$	$17.49 \pm 2.8\text{e-}03$	$17.49 \pm 1.9\text{e-}03$
	ZMT	$15.15 \pm 6.4\text{e-}04$	$15.15 \pm 7.2\text{e-}05$	$15.15 \pm 1.3\text{e-}05$
	SAR	$21.80 \pm 2.1\text{e-}03$	$21.80 \pm 2.9\text{e-}03$	$21.80 \pm 1.9\text{e-}03$
	TV	$31.85 \pm 2.9\text{e-}02$	$32.08 \pm 5.1\text{e-}02$	$32.18 \pm 6.3\text{e-}02$
	norm ℓ_1	$20.21 \pm 1.0\text{e-}03$	$20.21 \pm 1.6\text{e-}03$	$20.20 \pm 3.4\text{e-}04$
	TV-SAR	$31.98 \pm 1.1\text{e-}01$	$32.18 \pm 2.2\text{e-}02$	$32.26 \pm 9.7\text{e-}03$
	$\lambda = 0.95$	$\lambda = 1.00$	$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.95$
	norm ℓ_1 -SAR	$21.80 \pm 2.1\text{e-}03$	$21.80 \pm 2.9\text{e-}03$	$21.80 \pm 1.9\text{e-}03$
	$\lambda = 0.00$	$\lambda = 0.00$	$\lambda = 0.00$	$\lambda = 0.00$
c 	BBC	$19.94 \pm 1.9\text{e-}04$	$19.94 \pm 5.6\text{e-}05$	$19.94 \pm 8.9\text{e-}06$
	RSR	$29.74 \pm 2.4\text{e-}02$	$29.77 \pm 2.1\text{e-}02$	$29.74 \pm 4.0\text{e-}02$
	ZMT	$23.76 \pm 1.6\text{e-}02$	$23.77 \pm 3.6\text{e-}03$	$23.78 \pm 5.1\text{e-}04$
	SAR	$33.18 \pm 9.2\text{e-}03$	$33.21 \pm 5.8\text{e-}03$	$33.21 \pm 6.6\text{e-}03$
	TV	$34.36 \pm 8.0\text{e-}03$	$34.53 \pm 3.0\text{e-}02$	$34.57 \pm 2.4\text{e-}02$
	norm ℓ_1	$31.42 \pm 1.0\text{e-}03$	$31.42 \pm 4.0\text{e-}04$	$31.42 \pm 8.2\text{e-}05$
	TV-SAR	$34.79 \pm 1.9\text{e-}02$	$34.90 \pm 6.4\text{e-}02$	$34.88 \pm 3.5\text{e-}02$
	$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.95$
	norm ℓ_1 -SAR	$33.18 \pm 9.2\text{e-}03$	$33.21 \pm 5.8\text{e-}03$	$33.21 \pm 6.6\text{e-}03$
	$\lambda = 0.00$	$\lambda = 0.00$	$\lambda = 0.00$	$\lambda = 0.00$
d 	BBC	$13.36 \pm 9.3\text{e-}05$	$13.36 \pm 2.4\text{e-}05$	$13.36 \pm 9.9\text{e-}07$
	RSR	$20.02 \pm 4.2\text{e-}03$	$20.02 \pm 3.8\text{e-}03$	$20.02 \pm 1.6\text{e-}03$
	ZMT	$16.46 \pm 1.5\text{e-}04$	$16.46 \pm 1.9\text{e-}04$	$16.46 \pm 5.3\text{e-}06$
	SAR	$22.81 \pm 8.4\text{e-}04$	$22.81 \pm 1.6\text{e-}03$	$22.81 \pm 5.7\text{e-}04$
	TV	$39.00 \pm 6.9\text{e-}02$	$41.90 \pm 2.7\text{e-}01$	$43.93 \pm 1.9\text{e-}01$
	norm ℓ_1	$24.51 \pm 1.4\text{e-}03$	$24.51 \pm 5.7\text{e-}04$	$24.51 \pm 2.3\text{e-}05$
	TV-SAR	$39.00 \pm 6.9\text{e-}02$	$41.90 \pm 2.7\text{e-}01$	$43.93 \pm 1.9\text{e-}01$
	$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$
	norm ℓ_1 -SAR	$24.51 \pm 1.4\text{e-}03$	$24.51 \pm 5.7\text{e-}04$	$24.51 \pm 2.3\text{e-}05$
	$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$

Tabla 4.8: Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 11 observaciones para los niveles de ruido entre 25db y 40db

Imagen x	Algoritmo	SNR 25db	SNR 30db	SNR 40db
e 	BBC	$21.36 \pm 1.1e-04$	$21.36 \pm 6.0e-06$	$21.36 \pm 1.8e-06$
	RSR	$28.05 \pm 6.9e-02$	$28.12 \pm 3.5e-02$	$28.15 \pm 7.1e-03$
	ZMT	$25.43 \pm 4.0e-04$	$25.43 \pm 5.0e-05$	$25.43 \pm 1.2e-05$
	SAR	$31.01 \pm 1.0e-03$	$31.02 \pm 4.5e-03$	$31.02 \pm 3.7e-03$
	TV	$31.06 \pm 6.4e-03$	$31.07 \pm 5.7e-03$	$31.06 \pm 1.9e-03$
	norm ℓ_1	$28.72 \pm 4.4e-04$	$28.72 \pm 1.8e-04$	$28.72 \pm 1.3e-04$
	TV-SAR	$31.06 \pm 6.4e-03$	$31.07 \pm 5.7e-03$	$31.06 \pm 1.9e-03$
	$\lambda = 1.00$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$
	norm ℓ_1 -SAR	$31.01 \pm 1.0e-03$	$31.02 \pm 4.5e-03$	$31.02 \pm 3.7e-03$
	$\lambda = 0.00$		$\lambda = 0.00$	$\lambda = 0.00$
f 	BBC	$19.89 \pm 2.2e-05$	$19.89 \pm 2.4e-05$	$19.89 \pm 8.5e-07$
	RSR	$27.86 \pm 2.1e-02$	$27.93 \pm 5.2e-02$	$27.89 \pm 2.9e-03$
	ZMT	$24.62 \pm 1.5e-04$	$24.62 \pm 1.3e-04$	$24.62 \pm 7.8e-06$
	SAR	$30.28 \pm 9.7e-04$	$30.29 \pm 2.8e-03$	$30.29 \pm 9.6e-04$
	TV	$31.27 \pm 1.6e-02$	$31.27 \pm 8.5e-03$	$31.27 \pm 4.0e-03$
	norm ℓ_1	$28.78 \pm 5.5e-04$	$28.78 \pm 8.7e-05$	$28.78 \pm 2.9e-05$
	TV-SAR	$31.27 \pm 1.6e-02$	$31.27 \pm 8.5e-03$	$31.27 \pm 4.0e-03$
	$\lambda = 1.00$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$
	norm ℓ_1 -SAR	$30.28 \pm 9.7e-04$	$30.29 \pm 2.8e-03$	$30.29 \pm 9.6e-04$
	$\lambda = 0.00$		$\lambda = 0.00$	$\lambda = 0.00$
g 	BBC	$18.94 \pm 6.7e-05$	$18.94 \pm 7.4e-06$	$18.94 \pm 6.3e-06$
	RSR	$30.10 \pm 4.0e-03$	$30.18 \pm 8.7e-02$	$30.22 \pm 8.4e-02$
	ZMT	$25.01 \pm 5.6e-03$	$25.01 \pm 2.9e-03$	$25.01 \pm 2.6e-04$
	SAR	$33.65 \pm 1.4e-02$	$33.67 \pm 3.4e-03$	$33.66 \pm 8.8e-03$
	TV	$35.84 \pm 2.1e-02$	$35.96 \pm 2.9e-02$	$36.01 \pm 1.8e-02$
	norm ℓ_1	$32.29 \pm 1.3e-03$	$32.30 \pm 7.7e-04$	$32.30 \pm 4.1e-04$
	TV-SAR	$35.93 \pm 3.1e-02$	$36.00 \pm 2.7e-02$	$36.02 \pm 9.7e-03$
	$\lambda = 0.95$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$
	norm ℓ_1 -SAR	$33.65 \pm 1.4e-02$	$33.67 \pm 3.4e-03$	$33.66 \pm 8.8e-03$
	$\lambda = 0.00$		$\lambda = 0.00$	$\lambda = 0.00$
h 	BBC	$20.77 \pm 4.9e-04$	$20.77 \pm 9.8e-06$	$20.77 \pm 1.1e-05$
	RSR	$30.03 \pm 2.7e-02$	$30.00 \pm 8.1e-02$	$30.05 \pm 1.2e-02$
	ZMT	$23.04 \pm 8.5e-04$	$23.04 \pm 3.7e-04$	$23.04 \pm 4.3e-06$
	SAR	$32.13 \pm 5.3e-03$	$32.19 \pm 5.1e-03$	$32.19 \pm 4.3e-03$
	TV	$34.59 \pm 6.6e-03$	$34.86 \pm 2.0e-02$	$34.87 \pm 2.3e-02$
	norm ℓ_1	$31.58 \pm 4.7e-03$	$31.59 \pm 2.1e-04$	$31.60 \pm 2.2e-04$
	TV-SAR	$34.59 \pm 6.6e-03$	$34.86 \pm 2.0e-02$	$34.87 \pm 2.3e-02$
	$\lambda = 1.00$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$
	norm ℓ_1 -SAR	$32.13 \pm 5.3e-03$	$32.19 \pm 5.1e-03$	$32.19 \pm 4.3e-03$
	$\lambda = 0.00$		$\lambda = 0.00$	$\lambda = 0.00$

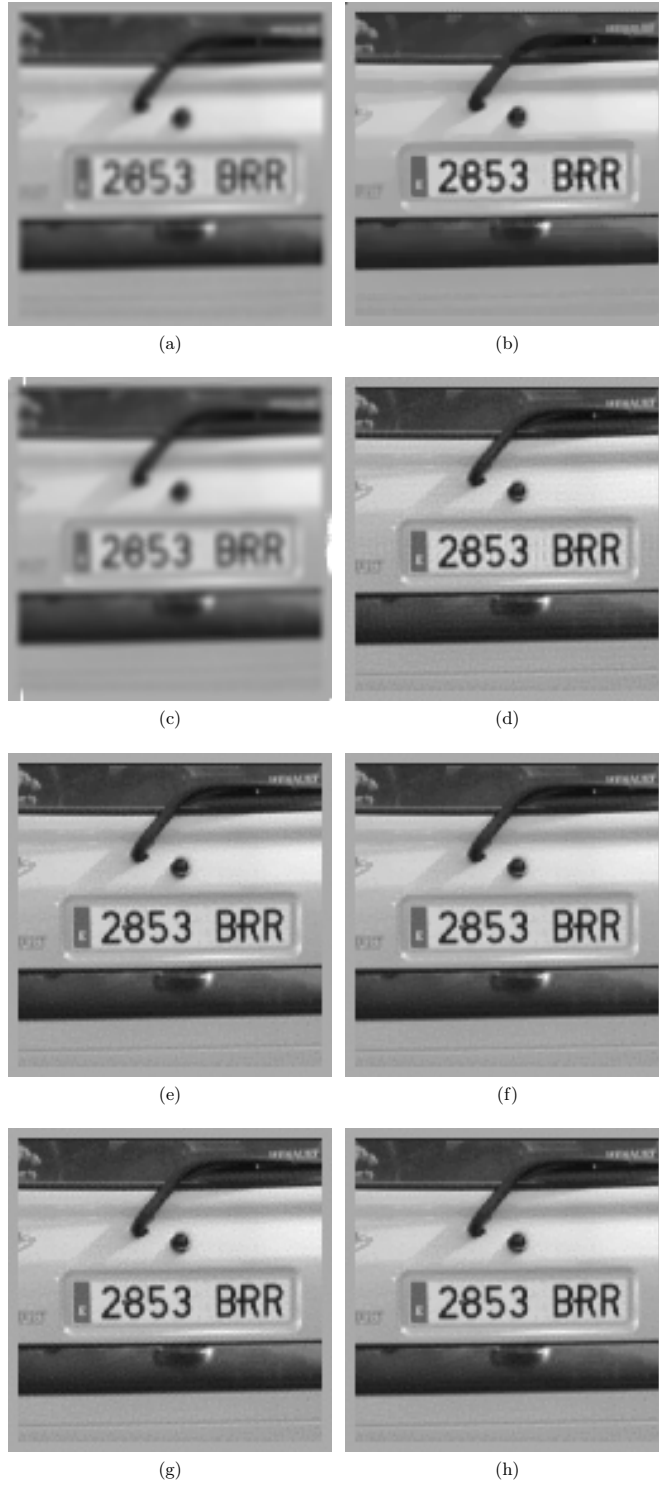


Figura 4.1: Reconstrucciones de la imagen 3.2(a) de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones a partir de las observaciones con nivel de ruido de $20db$. (a) BBC con $PSNR = 23,04$, (b) RSR con $PSNR = 31,81$, (c) ZMT con $PSNR = 23,56$, (d) SAR con $PSNR = 37,42$, (e) TV con $PSNR = 41,01$, (f) norma ℓ_1 con $PSNR = 42,07$, (g) TV-SAR con $PSNR = 41,14$ y (h) norma ℓ_1 -SAR con $PSNR = 42,16$.

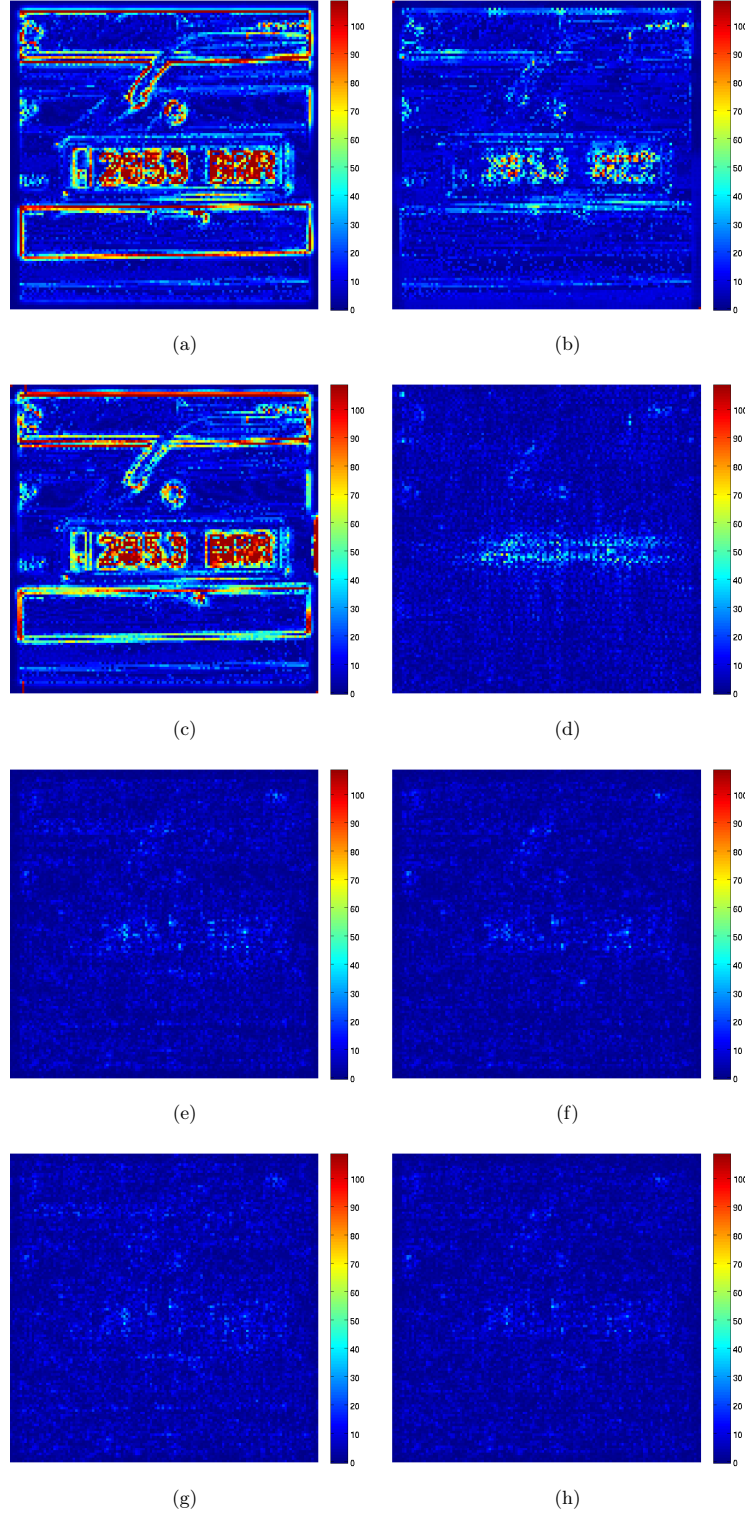
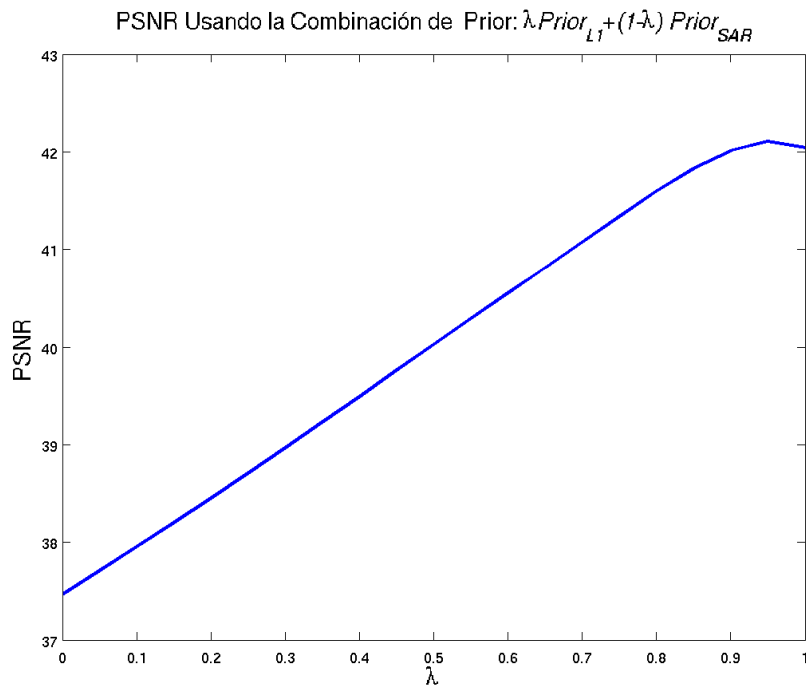
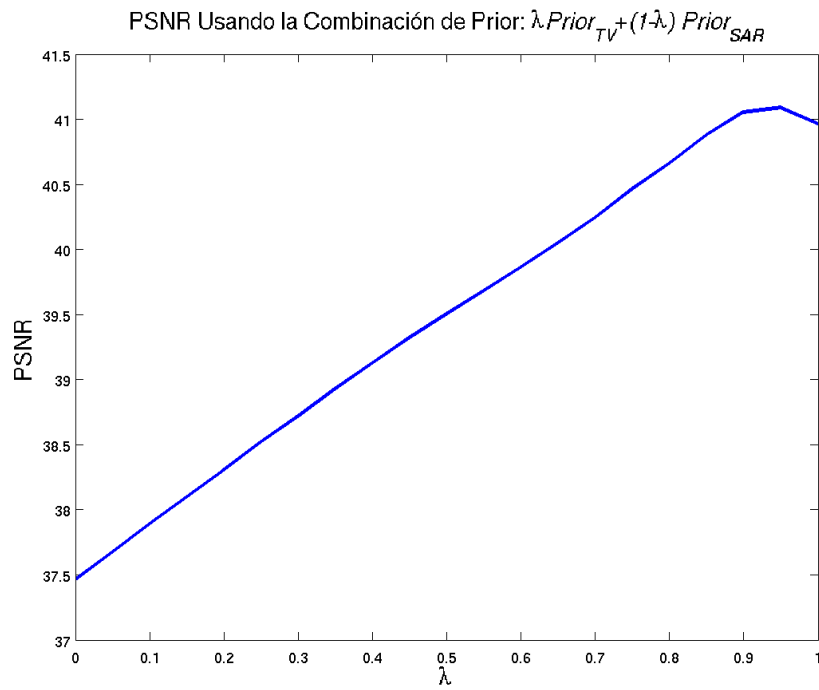


Figura 4.2: Muestra $|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{true}|$ para las imágenes de AR 3.2(a) estimadas $\hat{\mathbf{x}}$ en el experimento con 5 observaciones con nivel de ruido de $20db$ en las observaciones. (a) BBC, (b) RSR, (c) ZMT, (d) SAR, (e) TV, (f) norma ℓ_1 , (g) TV-SAR y (h) norma ℓ_1 -SAR.



(a)



(b)

Figura 4.3: Muestra los valores de (a) λ_2 y (b) λ_3 en el experimento con 5 observaciones para la imagen (1) con 20db de ruido.

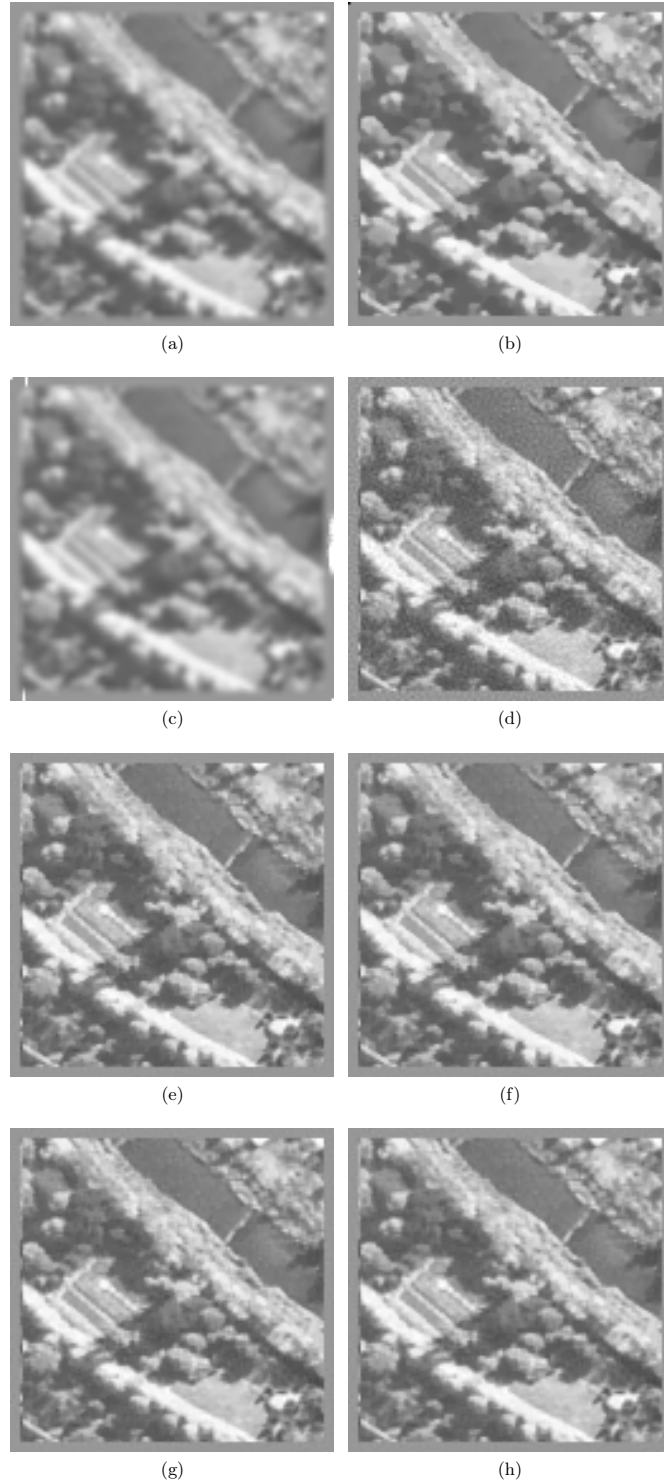


Figura 4.4: Reconstrucciones de la imagen de AR 3.2(e) obtenidas en el experimento con 5 observaciones a partir de las observaciones con nivel de ruido de $10db$. (a) BBC con $PSNR = 25,33$, (b) RSR con $PSNR = 31,37$, (c) ZMT con $PSNR = 26,82$, (d) SAR con $PSNR = 32,01$, (e) TV con $PSNR = 33,71$, (f) norma ℓ_1 con $PSNR = 33,56$, (g) TV-SAR con $PSNR = 34,01$ y (h) norma ℓ_1 -SAR con $PSNR = 33,92$.

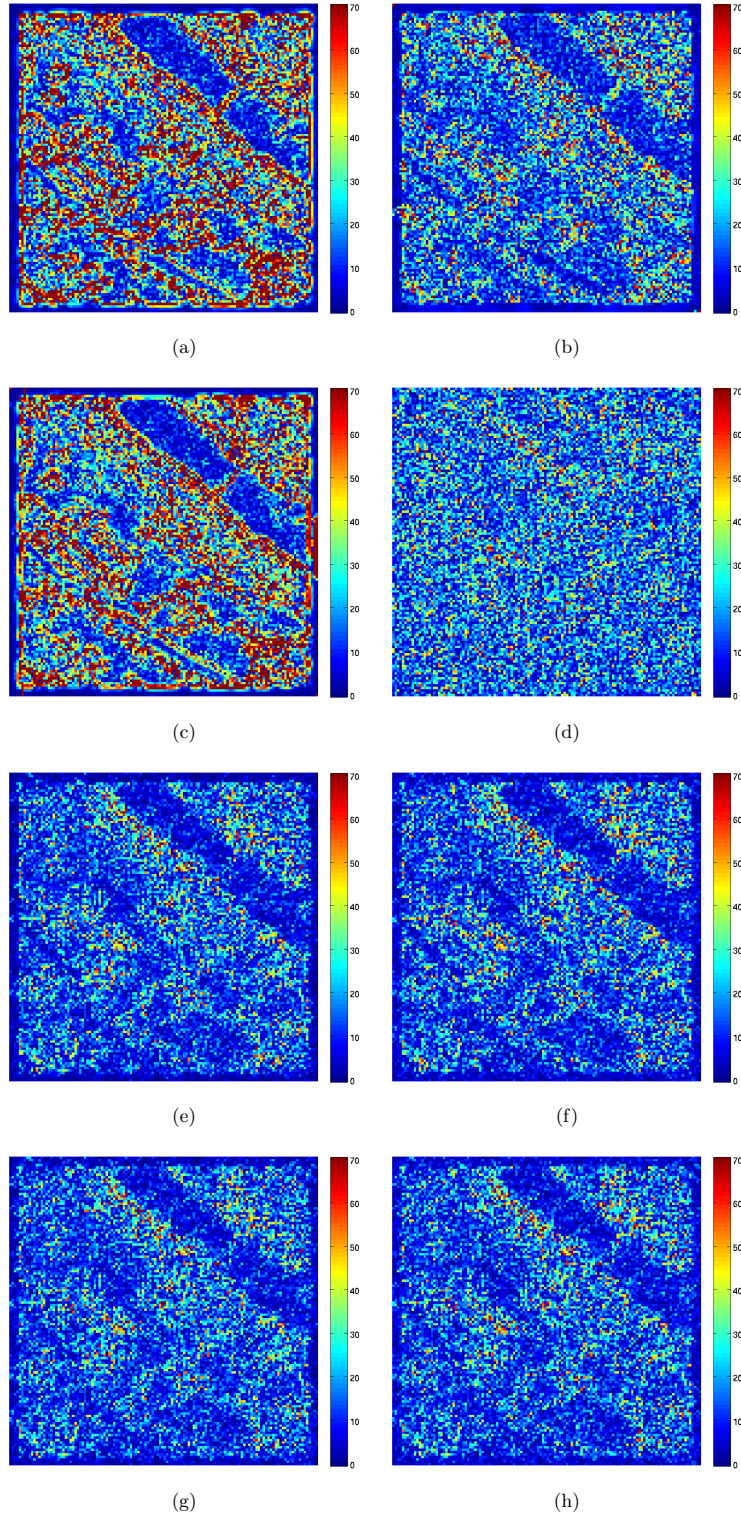
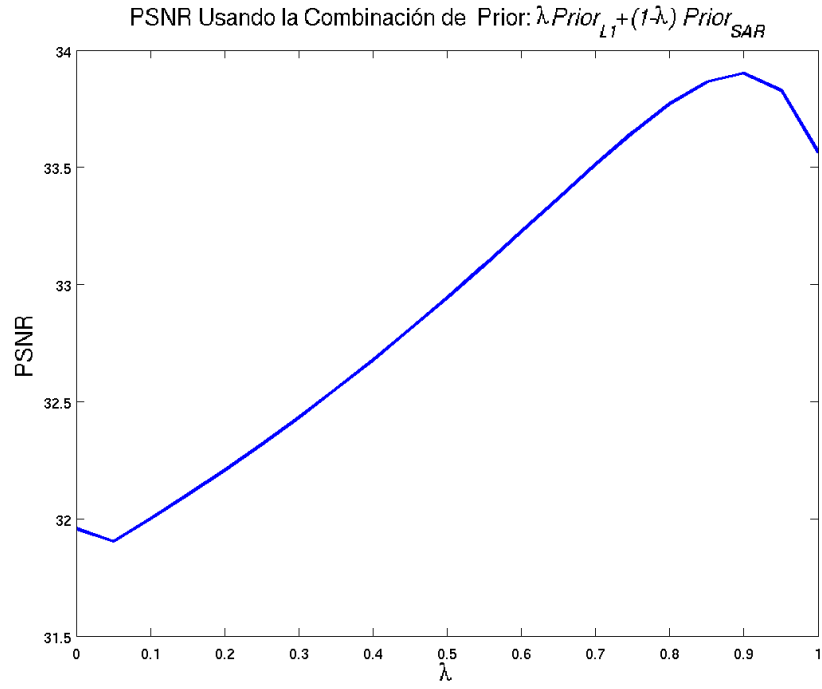
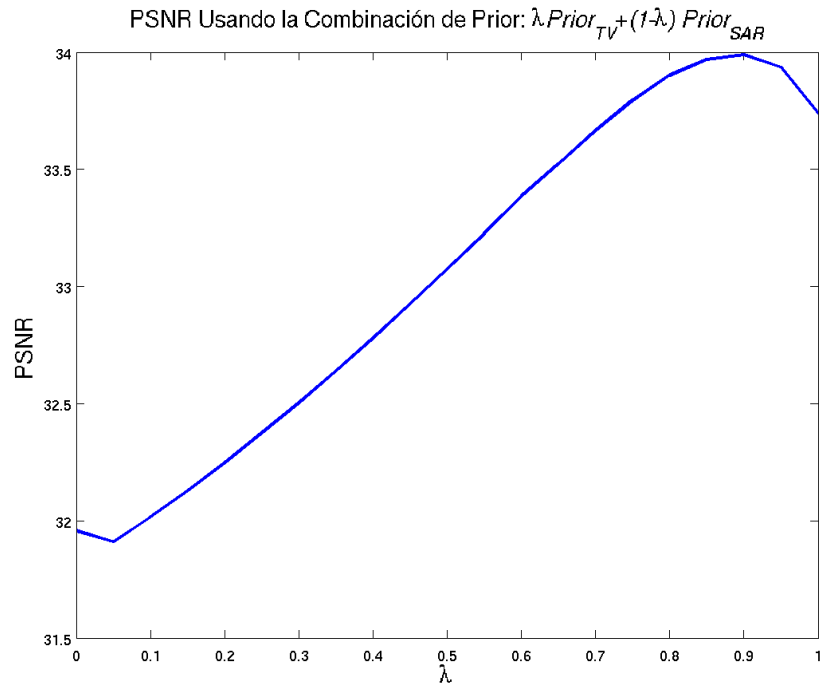


Figura 4.5: Muestra $|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{true}|$ para las imágenes de AR 3.2(e) estimadas $\hat{\mathbf{x}}$ en el experimento con 5 observaciones con nivel de ruido de $10db$ en las observaciones. (a) BBC, (b) RSR, (c) ZMT, (d) SAR, (e) TV, (f) norma ℓ_1 , (g) TV-SAR y (h) norma ℓ_1 -SAR.



(a)



(b)

Figura 4.6: Muestra los valores de (a) λ_2 y (b) λ_3 en el experimento con 5 observaciones para la imagen (5) con 10db de ruido.

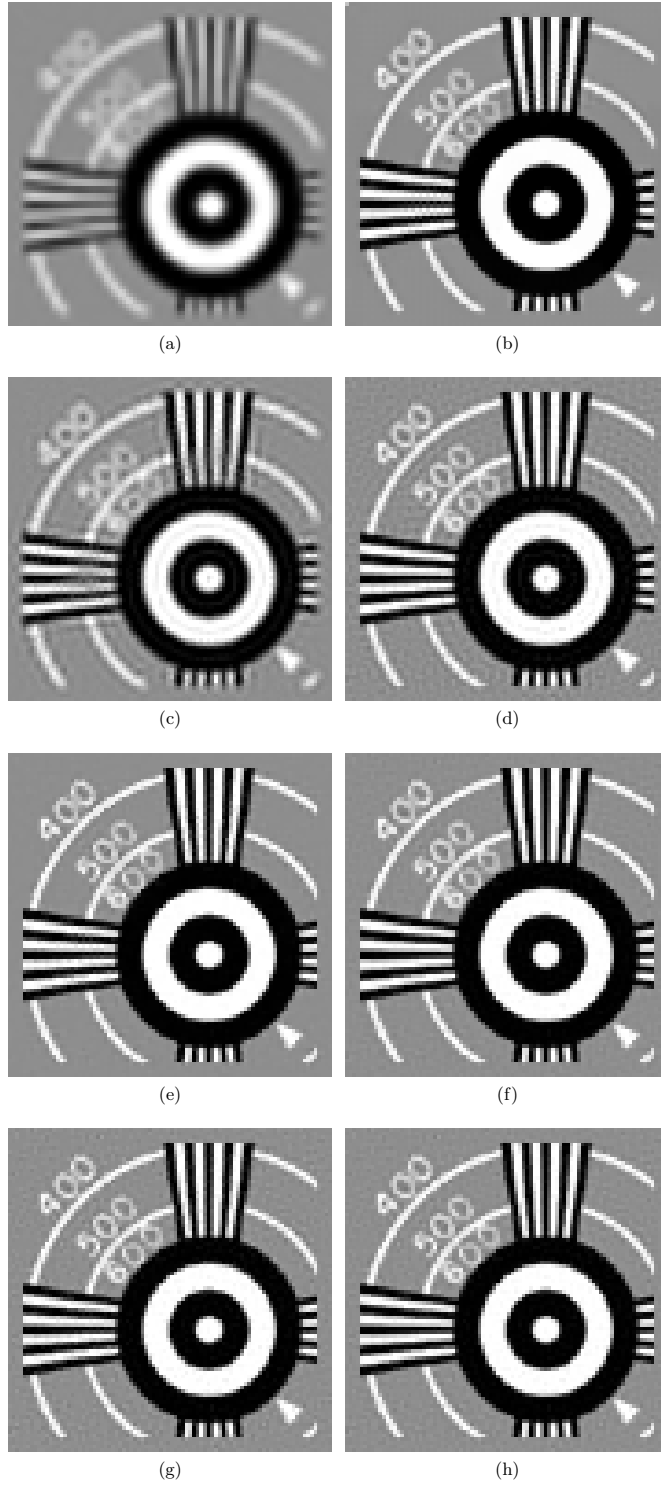


Figura 4.7: Reconstrucciones de la imagen de AR 3.2(b) obtenidas en el experimento con 5 observaciones a partir de las observaciones con nivel de ruido de 15db. (a) BBC con $PSNR = 16,38$, (b) RSR con $PSNR = 30,82$, (c) ZMT con $PSNR = 19,57$, (d) SAR con $PSNR = 30,16$, (e) TV con $PSNR = 33,71$, (f) norma ℓ_1 con $PSNR = 34,27$, (g) TV-SAR con $PSNR = 34,51$ y (h) norma ℓ_1 -SAR con $PSNR = 34,62$.

4.5. Conclusiones

En este capítulo hemos presentado dos nuevos métodos de SR Bayesiana variacional basados en la combinación de distribuciones a posteriori. En particular, hemos combinado, por un lado, la distribución a posteriori del modelo a priori SAR con el modelo basado en la norma ℓ_1 y por otro lado, la distribución a posteriori del modelo a priori SAR con la del modelo TV. Estas combinaciones de modelos se propusieron en Villena et al. (2010c) y Villena et al. (2010a). Los métodos propuestos se han comparado favorablemente con otros métodos de SR que usan un único modelo a priori, como el método robusto de Zomet et al. (2001) basado en un algoritmo de Back-Projection, el método de SR robusto propuesto en Farsiu et al. (Oct. 2004) basado en el modelo a priori TV bilateral, el método de SR variacional propuesto en Babacan et al. (2011) y basado en el modelo a priori TV y el método variacional de SR propuesto en Villena et al. (2009a) que utiliza el modelo a priori basado en la norma ℓ_1 . Para la comparación se ha utilizado una amplia gama de imágenes de diversa naturaleza.

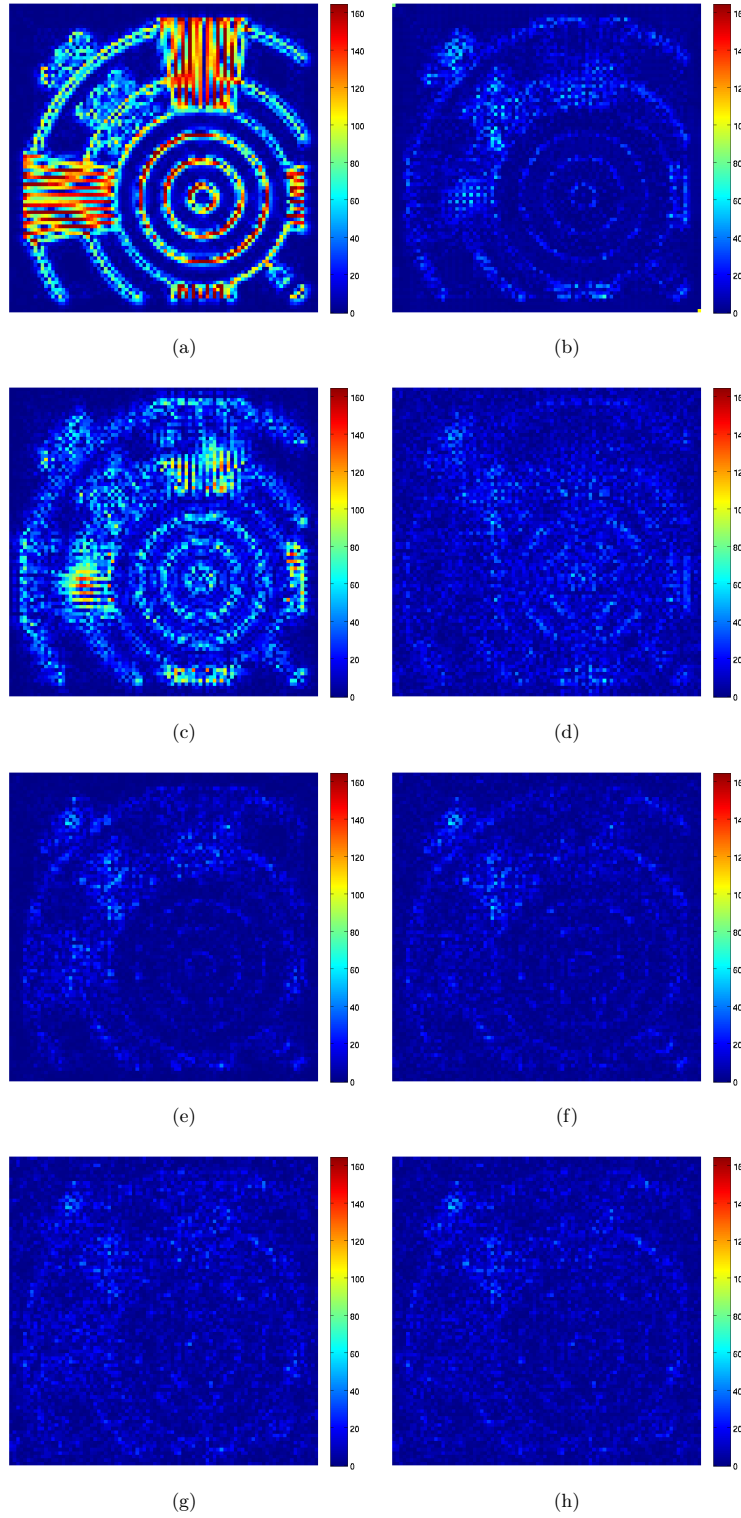
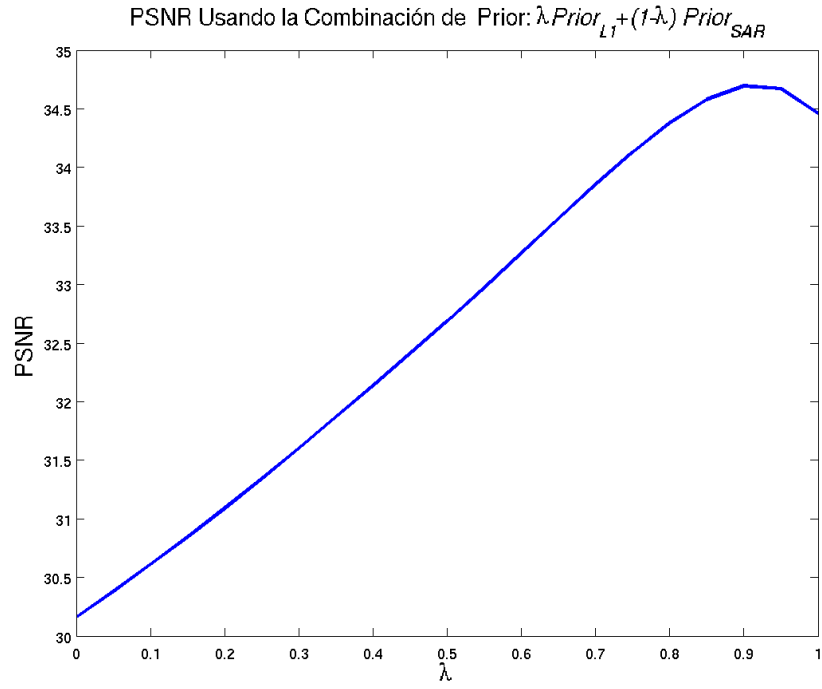
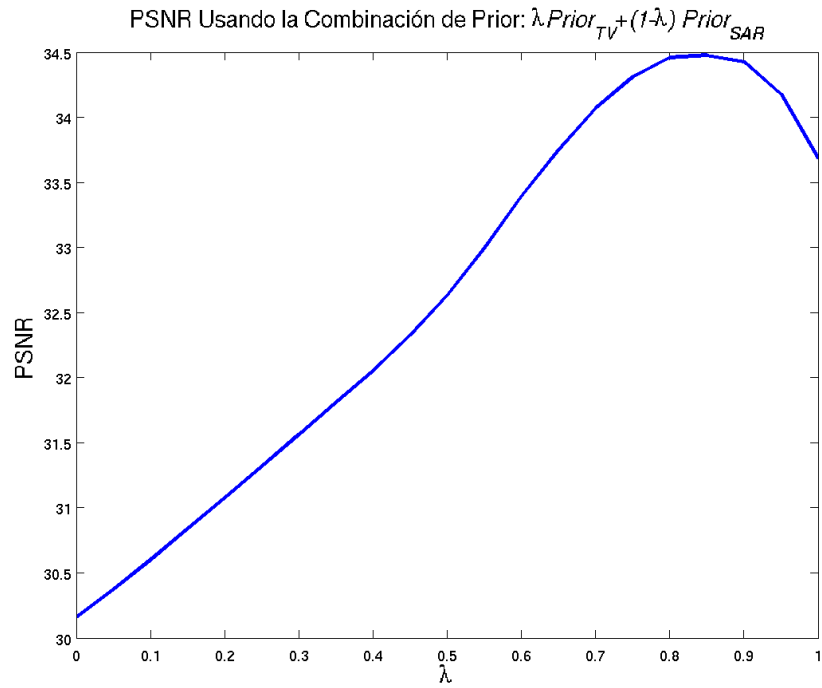


Figura 4.8: Muestra $|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{true}|$ para las imágenes de AR 3.2(b) estimadas $\hat{\mathbf{x}}$ en el experimento con 5 observaciones con nivel de ruido de $10db$ en las observaciones. (a) BBC, (b) RSR, (c) ZMT, (d) SAR, (e) TV, (f) norma ℓ_1 , (g) TV-SAR y (h) norma ℓ_1 -SAR.



(a)



(b)

Figura 4.9: Muestra los valores de (a) λ_2 y (b) λ_3 en el experimento con 5 observaciones para la imagen (2) con 10db de ruido.

Capítulo 5

Superresolución con Estimación del Movimiento

5.1. Introducción

Por lo general los métodos de SR constan de un proceso de registrado para estimar los parámetros del movimiento de las observaciones con respecto a la imagen de referencia y de un proceso de estimación de la imagen de AR (vease Park et al. (2003), Borman (2004), Katsaggelos et al. (2007) y Milanfar (2010)). Este proceso de registrado es imprescindible en la SR de secuencias de imágenes reales, y la calidad de la imagen de AR depende tanto del algoritmo de SR como de la precisión del registrado, (ver Vandewalle (2006)).

Una gran parte de los métodos de SR aparecidos en la literatura dan por conocidos los parámetros del movimiento de las observaciones, que muchos métodos estiman previamente, a nivel de BR, aplicando un método convencional de registrado (véase Brown (1992) y Zitova y Flusser (2003)), y centran sus esfuerzos en el algoritmo de SR propuesto. Entre los métodos de SR que aplican esta estrategia, se encuentran los métodos propuestos en Elad y Feuer (1997), Zomet et al. (2001), Farsiu et al. (Oct. 2004) y Vandewalle et al. (2007).

Evidentemente la dificultad de estimar los parámetros de movimiento de forma precisa aumenta a medida que aumenta la degradación de la observaciones. Esto es, la imprecisión del registrado aumenta con el emborronamiento, el factor de submuestreo y el ruido. Estas imprecisiones dificultan, aún más, la reconstrucción de la imagen de AR. En Villena et al. (2004) aplicamos esta estrategia de registrado previo a la SR, pero propusimos una técnica para mejorar su precisión, consistente en transformar previamente las observaciones de BR en imágenes de AR mediante el algoritmo de SR propuesto en Molina et al. (2003a), ignorando inicialmente en este proceso, el efecto del movimiento.

En otros métodos, en cambio, se estiman los parámetros del movimiento junto con la imagen de AR, dentro del algoritmo de SR. Así sucede por ejemplo en Hardie et al. (1997), Mateos et al. (2000), Segall et al. (2004), Ng et al. (2002), Baker y Kanade (2002), Segall et al. (2003), Šroubek y Flusser (2005), Woods et al. (2006), Kanemura et al. (2009), Tipping y Bishop (2003), Pickup et al. (2007), Babacan (2009) y en Villena et al. (2010b), Villena et al. (2011) que forman parte de las aportaciones de esta tesis.

En general, los métodos de este segundo grupo también requieren un proceso de registrado previo. Pero la diferencia está en que ahora el método de registrado previo utilizado y la precisión del mismo no son determinantes, para la calidad de las reconstrucciones.

En este capítulo nos centraremos en la estimación de la imagen de AR junto con el movimiento de las observaciones aplicando los métodos de SR Bayesianos variacionales mediante combinaciones de modelos a priori estudiados en el capítulo anterior.

5.2. Modelización Bayesiana Jerarquizada

En este capítulo se estimará la imagen de AR $\mathbf{x}$ junto con los parámetros del movimiento $\{\mathbf{s}_k\}$ y los hiperparámetros. En realidad todos los elementos de la modelización Bayesiana Jerárquica de nuestro problema, salvo lo relativo a los parámetros del movimiento, han sido ya estudiados en los capítulos anteriores.

Volvemos a escribir aquí, para mayor comodidad, nuestro modelo de observación, de la Ec. (3.4), en el que ahora hemos incluido, entre las incógnitas del modelo, los parámetros del movimiento $\{\mathbf{s}_k\}$

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \{\mathbf{s}_k\}, \{\beta_k\}) \propto \left[\prod_{k=1}^L \beta_k^{\frac{NP}{2}} \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \beta_k \|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}\|^2 \right], \quad (5.1)$$

donde β_k representa la inversa de la varianza del ruido y $\mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k) = \mathbf{A}\mathbf{H}_k\mathbf{C}(\mathbf{s}_k)$ ha sido definida en la Ec. (2.2). Como en los capítulos anteriores la imagen transformada $\mathbf{C}(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}$ será aproximada mediante la interpolación bilineal definida en la Ec. (3.9), como en He et al. (2007).

Trabajaremos con los modelos a priori de la imagen de AR $\mathbf{x}$ SAR, TV y el basado en la norma ℓ_1 definidos por las Ecs. (3.1), (4.6) y (3.2) respectivamente y, como en el capítulo anterior, estudiaremos las combinaciones de los modelos SAR y ℓ_1 , y la de SAR y TV. Para los hiperprior utilizaremos distribuciones gamma ya definidas en la Ec. (3.10).

5.2.1. Modelización de las incertidumbres de los parámetros del movimiento

El nuevo elemento, a introducir en este capítulo, en el modelo Bayesiano Jeráquico, es la incertidumbre de los parámetros de movimiento de las observaciones. Como ya se ha dicho, partiremos de una estimación inicial de los desplazamientos y rotaciones de las imágenes de BR obtenidas mediante la aplicación de algunos de los métodos de registrado conocidos (veáse Brown (1992) y Zitova y Flusser (2003)) y que notaremos como $\{\bar{\mathbf{s}}_k^p\}$. Ya se ha mencionado anteriormente que las estimaciones en BR del movimiento suelen ser imprecisas y limitan muy seriamente la calidad de las imágenes AR a obtener mediante los métodos de SR. En base a esto, modelaremos los parámetros de movimiento como variables estocásticas que siguen una distribución Gaussiana con valor medio a priori igual a la estimación inicial $\bar{\mathbf{s}}_k^p$ para cada observación, esto es

$$p(\mathbf{s}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{s}_k | \bar{\mathbf{s}}_k^p, \Xi_k^p), \quad (5.2)$$

donde Ξ_k^p representa la matriz de covarianza a priori de los parámetros de movimiento para la observación $\mathbf{y}_k$. Obsérvese que tanto los parámetros $\{\bar{\mathbf{s}}_k^p\}$ como $\{\Xi_k^p\}$ incorporan información a priori sobre el movimiento de las observaciones en el proceso de estimación, pero que si no dispusiésemos de esta información bastaría con utilizar una distribución plana sobre $\mathbf{s}_k$, con lo que la estimación se basaría únicamente en las observaciones.

Este tipo de modelización de los parámetros del movimiento mediante una distribución Gaussiana ha sido también adoptado en los algoritmos propuestos en Lee y Kang (2003), Tipping y Bishop (2003), Pickup et al. (2007), pero aplicando métodos de inferencia diferentes de los que vamos a utilizar en esta memoria.

Finalmente combinando las Ecs. (5.1), (3.1), (3.2), (4.6), (3.10) y (5.2), resultan las distribuciones conjuntas

$$p_l(\Theta_l, \mathbf{y}) = p(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \{\beta_k\}) p_l(\mathbf{x} | \alpha_l) p(\alpha_l) \prod_{k=1}^L p(\beta_k) \prod_{k=1}^L p(\mathbf{s}_k), \quad (5.3)$$

siendo ahora $\Theta_l = \{\Omega, \alpha_l\}$, $\Omega = \{\mathbf{x}, \{\mathbf{s}_k\}, \{\beta_k\}\}$, $p(\alpha_2) = p(\alpha_2^h) p(\alpha_2^v)$ y donde $l = \{1, 2, 3\}$ denota las diferentes distribuciones que corresponden a los modelos a priori SAR, norma ℓ_1 y TV respectivamente.

5.3. Inferencia Bayesiana Variacional

Aplicaremos el mismo método de inferencia Bayesiana que en el capítulo anterior, a partir de m modelos a posteriori $p(\alpha_l, \Omega | \mathbf{y})$, para $l = 1, 2, \dots, m$

y consistente en minimizar la combinación de divergencias de KL de la Ec. (4.7), de la que resulta

$$\hat{q}(\Phi) = \underset{q(\Phi)}{\operatorname{argmin}} \mathcal{R}(\Phi) \quad (5.4)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\Phi) = \int q(\Phi) \log \left(\frac{q(\Omega)}{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \{\beta_k\}) \prod_{k=1}^L p(\beta_k) \prod_{k=1}^L p(\mathbf{s}_k)} \right. \\ \left. \prod_{l=1}^m \left[\frac{q(\alpha_l)}{p_l(\mathbf{x}|\alpha_l)p(\alpha_l)} \right]^{\lambda_l} \right) d\Phi. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Nuevamente, estudiaremos la combinación del modelo a priori SAR con el modelo basados en la norma ℓ_1 , y también con el modelo TV. Ambas configuraciones las notaremos como Φ_c para $c \in \{\ell_1, TV\}$ y con $m = 3$ en ambas, $\lambda_{\ell_1} = \{1 - \lambda_2, \lambda_2, 0\}$ y $\lambda_{TV} = \{1 - \lambda_3, 0, \lambda_3\}$. Como, en el capítulo anterior debemos aplicar la técnica de mayorización. Las distribuciones a priori $p_l(\mathbf{x}|\alpha_l)$ para $l = 2, 3$ serán aproximadas por sus cotas inferiores $M(\alpha_2^h, \alpha_2^v, \mathbf{x}, \mathbf{w}_2^h, \mathbf{w}_2^v)$ definida en la Ec. (3.26) y $M_3(\alpha_3, \mathbf{x}, \mathbf{w}_3)$ definida en la Ec. (4.14), respectivamente. Ambas cotas aparecen definidas en términos de las variables desconocidas $\mathbf{w}_2^h$, $\mathbf{w}_2^v$ y $\mathbf{w}_3$, que han sido interpretadas como indicadores de bordes en la imagen de AR. Así obtendremos también cotas inferiores para la distribuciones conjuntas, de la forma:

$$\begin{aligned} p_2(\Theta_2, \mathbf{y}) &\geq p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \{\beta_k\}) M(\alpha_2^h, \alpha_2^v, \mathbf{x}, \mathbf{w}_2^h, \mathbf{w}_2^v) \\ &\quad p(\alpha_2^h) p(\alpha_2^v) \prod_{k=1}^L p(\beta_k) \prod_{k=1}^L p(\mathbf{s}_k) \\ &= \mathbf{F}(\Theta_2, \mathbf{y}, \mathbf{w}^h, \mathbf{w}^v), \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} p_3(\Omega, \alpha_3, \mathbf{y}) &\geq p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \{\beta_k\}) M_3(\alpha_3, \mathbf{x}, \mathbf{w}_3) p(\alpha_3) \prod_{k=1}^L p(\beta_k) \prod_{k=1}^L p(\mathbf{s}_k) \\ &= \mathbf{F}_3(\Omega, \alpha_3, \mathbf{y}, \mathbf{w}_3). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Ambas cotas inferiores nos permiten mayorizar $\mathcal{R}(\Phi)$ de la Ec. (5.5), permitiéndonos así resolver la Ec. (5.4), minimizando iterativamente, y de forma alternativa, con respecto a las nuevas variables introducidas, $\mathbf{w}_2^h$, $\mathbf{w}_2^v$ y $\mathbf{w}_3$, y con respecto al resto de las variables, estrechando cada vez más la cota y acercándonos a la solución exacta (ver Bioucas-Dias et al. (2006)).

Nuestro objetivo es encontrar las distintas distribuciones $q(\alpha_l)$, $q(\mathbf{x})$, $q(\mathbf{s}_k)$ y $q(\beta_k)$ que minimizan la Ec. (5.4). Las distribuciones $q(\alpha_l)$ para $l = 1, 2, 3$ vienen dadas por

$$q(\alpha_1) = \text{const} \times \exp \left(\langle \log p_1(\Omega, \alpha_1, \mathbf{y}) \rangle_{q(\Omega)} \right), \quad (5.8)$$

$$q(\alpha_2) = \text{const} \times \exp \left(\langle \log \mathbf{F}(\Theta_2, \mathbf{y}, \mathbf{w}_2^h, \mathbf{w}_2^v) \rangle_{q(\Omega)} \right), \quad (5.9)$$

y

$$q(\alpha_3) = \text{const} \times \exp \left(\langle \log \mathbf{F}_3(\Omega, \alpha_3, \mathbf{y}, \mathbf{w}_3) \rangle_{q(\Omega)} \right). \quad (5.10)$$

Para el resto de distribuciones obtendremos las expresiones

$$q_{\ell 1}(\xi) = \text{const} \times \exp \left(\left\langle \log \left[p(\mathbf{y}|\Omega) \prod_{k=1}^L p(\beta_k) \prod_{k=1}^L p(\mathbf{s}_k) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left[M(\alpha_2^h, \alpha_2^v, \mathbf{x}, \mathbf{w}_2^h, \mathbf{w}_2^v) p(\alpha_2) \right]^{\lambda_2} [p_1(\mathbf{x}|\alpha_1) p(\alpha_1)]^{1-\lambda_2} \right] \right\rangle_{q(\Phi_{\ell 1 \xi})} \right), \quad (5.11)$$

para la configuración $c = \ell 1$, y

$$q_{TV}(\xi) = \text{const} \times \exp \left(\left\langle \log \left[p(\mathbf{y}|\Omega) \prod_{k=1}^L p(\beta_k) \prod_{k=1}^L p(\mathbf{s}_k) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. [M_3(\alpha_3, \mathbf{x}, \mathbf{w}_3) p(\alpha_3)]^{\lambda_3} [p_1(\mathbf{x}|\alpha_1) p(\alpha_1)]^{1-\lambda_3} \right] \right\rangle_{q(\Phi_{TV \xi})} \right), \quad (5.12)$$

para $c = TV$, donde $\Phi_{c\xi}$, para $c \in \{\ell 1, TV\}$, denota el conjunto de variables Φ_c habiendo eliminado ξ .

5.3.1. Estimación de la Imagen de Alta Resolución y los Parámetros del Registrado

Para obtener la función de distribución $q(\mathbf{x})$ partiremos de la Ec.(5.11) para $c = \ell 1$, resultando una distribución Gaussiana multivariante de la forma:

$$q_{\ell 1}(\mathbf{x}) \propto \exp \left(-\frac{1}{2} \lambda_2 \left\{ \langle \alpha_2^h \rangle \sum_i \frac{(\Delta_i^h(\mathbf{x}))^2 + w_{2i}^h}{\sqrt{w_{2i}^h}} \right. \right. \\ \left. \left. + \langle \alpha_2^v \rangle \sum_i \frac{(\Delta_i^v(\mathbf{x}))^2 + w_{2i}^v}{\sqrt{w_{2i}^v}} \right\} - \frac{(1 - \lambda_2)}{2} \langle \alpha_1 \rangle \|\mathcal{C}\mathbf{x}\|^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_k \langle \beta_k \rangle \langle \|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}\|^2 \rangle_{q(\mathbf{s}_k)} \right), \quad (5.13)$$

y de la Ec. (5.12) para $c = TV$,

$$q_{TV}(\mathbf{x}) \propto \exp \left(-\frac{1}{2} \langle \alpha_3 \rangle \lambda_3 \sum_i \frac{(\Delta_i^h(\mathbf{x}))^2 + (\Delta_i^v(\mathbf{x}))^2 + w_{3i}}{\sqrt{w_{3i}}} - \frac{(1 - \lambda_3)}{2} \langle \alpha_1 \rangle \|\mathcal{C}\mathbf{x}\|^2 - \frac{1}{2} \sum_k \langle \beta_k \rangle \langle \|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}\|^2 \rangle_{q(\mathbf{s}_k)} \right). \quad (5.14)$$

También, a partir de las Ecs. (5.11) y (5.12), podemos encontrar la distribución $q(\mathbf{s}_k)$ que tiene la forma

$$q(\mathbf{s}_k) \propto \exp \left(-\frac{1}{2} \langle \beta_k \rangle \langle \|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}\|^2 \rangle_{q(\mathbf{x})} - \frac{1}{2} (\mathbf{s}_k - \bar{\mathbf{s}}_k^p)^t (\bar{\mathbf{\Xi}}_k^p)^{-1} (\mathbf{s}_k - \bar{\mathbf{s}}_k^p) \right). \quad (5.15)$$

La forma explícita de estas distribuciones depende de los valores esperados $\langle \|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}\|^2 \rangle_{q(\mathbf{s}_k)}$ y $\langle \|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}\|^2 \rangle_{q(\mathbf{x})}$ cuya estimación no es trivial, porque en $\mathbf{B}(\mathbf{s}_k) = \mathbf{A}\mathbf{H}_k\mathbf{C}(\mathbf{s}_k)$, definido en la Ec. (2.2), $\mathbf{C}(\mathbf{s}_k)$ no es lineal con respecto a $\mathbf{s}_k$. Para salvar este problema, aproximaremos $\mathbf{C}(\mathbf{s}_k)$ por los primeros términos de su desarrollo de Taylor alrededor del valor medio $\langle \mathbf{s}_k \rangle = \bar{\mathbf{s}}_k = (\bar{\theta}_k, \bar{c}_k, \bar{d}_k)^t$ de la distribución $q(\mathbf{s}_k)$, resultando

$$\mathbf{C}(\mathbf{s}_k) \approx \mathbf{C}(\bar{\mathbf{s}}_k) + [\mathbf{N}_1(\bar{\mathbf{s}}_k), \mathbf{N}_2(\bar{\mathbf{s}}_k), \mathbf{N}_3(\bar{\mathbf{s}}_k)] (\mathbf{s}_k - \bar{\mathbf{s}}_k), \quad (5.16)$$

donde

$$[\mathbf{N}_1(\bar{\mathbf{s}}_k)\mathbf{x}, \mathbf{N}_2(\bar{\mathbf{s}}_k)\mathbf{x}, \mathbf{N}_3(\bar{\mathbf{s}}_k)\mathbf{x}] = [(\mathbf{P}_1(\bar{\mathbf{s}}_k)\mathbf{M}_1(\bar{\mathbf{s}}_k) + \mathbf{P}_2(\bar{\mathbf{s}}_k)\mathbf{M}_2(\bar{\mathbf{s}}_k)), \mathbf{M}_1(\bar{\mathbf{s}}_k), \mathbf{M}_2(\bar{\mathbf{s}}_k)]. \quad (5.17)$$

En la Ec. (5.17)

$$\mathbf{M}_1(\bar{\mathbf{s}}_k) = (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{\mathbf{b}_k(\mathbf{s}_k)}) (\mathbf{L}_{\mathbf{tr}(s_k)} - \mathbf{L}_{\mathbf{tl}(s_k)}) + \mathbf{D}_{\mathbf{b}_k(\mathbf{s}_k)} (\mathbf{L}_{\mathbf{br}(s_k)} - \mathbf{L}_{\mathbf{bl}(s_k)}) \quad (5.18)$$

$$\mathbf{M}_2(\bar{\mathbf{s}}_k) = (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{\mathbf{a}_k(\mathbf{s}_k)}) (\mathbf{L}_{\mathbf{bl}(s_k)} - \mathbf{L}_{\mathbf{tl}(s_k)}) + \mathbf{D}_{\mathbf{a}_k(\mathbf{s}_k)} (\mathbf{L}_{\mathbf{br}(s_k)} - \mathbf{L}_{\mathbf{tr}(s_k)}), \quad (5.19)$$

y

$$\mathbf{P}_1(\bar{\mathbf{s}}_k) = [-\mathbf{D}_{\mathbf{u}} \sin(\bar{\theta}_k) - \mathbf{D}_{\mathbf{v}} \cos(\bar{\theta}_k)] \quad (5.20)$$

$$\mathbf{P}_2(\bar{\mathbf{s}}_k) = [\mathbf{D}_{\mathbf{u}} \cos(\bar{\theta}_k) - \mathbf{D}_{\mathbf{v}} \sin(\bar{\theta}_k)], \quad (5.21)$$

donde $\mathbf{D}_u$ y $\mathbf{D}_v$ son matrices diagonales con los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en sus diagonales respectivamente y las matrices $\mathbf{D}_{\mathbf{a}_k(s_k)}$, $\mathbf{D}_{\mathbf{b}_k(s_k)}$ y $\mathbf{L}_z$ con $\mathbf{z} \in \{\mathbf{tl}(s_k), \mathbf{tr}(s_k), \mathbf{bl}(s_k), \mathbf{br}(s_k)\}$ ya fueron introducidas en el apartado 3.2.2. Siendo $\mathbf{D}_{\mathbf{a}_k(s_k)}$ y $\mathbf{D}_{\mathbf{b}_k(s_k)}$ matrices diagonales con los vectores $\mathbf{a}_k(s_k)$ y $\mathbf{b}_k(s_k)$ en su diagonal, respectivamente y $\mathbf{L}_z$ con $\mathbf{z} \in \{\mathbf{tl}(s_k), \mathbf{tr}(s_k), \mathbf{bl}(s_k), \mathbf{br}(s_k)\}$ fueron construidas de forma que el producto $\mathbf{L}_z \mathbf{x}$ obtiene los valores de los píxeles ubicados arriba a la izquierda, arriba a la derecha, abajo a la izquierda y abajo a la derecha de (u_k, v_k) , respectivamente.

Utilizando las Ecs (2.2) y (5.16) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(s_k) &= \mathbf{A} \mathbf{H}_k \mathbf{C}(s_k) \\ &\approx \mathbf{A} \mathbf{H}_k \mathbf{C}(\bar{s}_k) + \mathbf{A} \mathbf{H}_k [\mathbf{N}_1(\bar{s}_k), \mathbf{N}_2(\bar{s}_k), \mathbf{N}_3(\bar{s}_k)] (\mathbf{s}_k - \bar{s}_k) \\ &= \mathbf{A} \mathbf{H}_k \mathbf{C}(\bar{s}_k) + [\mathbf{O}_{k1}(\bar{s}_k), \mathbf{O}_{k2}(\bar{s}_k), \mathbf{O}_{k3}(\bar{s}_k)] (\mathbf{s}_k - \bar{s}_k), \end{aligned} \quad (5.22)$$

con

$$\mathbf{O}_{kr}(\bar{s}_k) = \mathbf{A} \mathbf{H}_k \mathbf{N}_r(\bar{s}_k), \quad r = 1, 2, 3 \quad (5.23)$$

La expresión $\sum_k \langle \beta_k \rangle \langle \|\mathbf{y}_k - \mathbf{A} \mathbf{H}_k \mathbf{C}(s_k) \mathbf{x}\|^2 \rangle_{q(s_k)}$ podemos evaluarla usando la Ec. (5.22) para obtener

$$\begin{aligned} &\sum_k \langle \beta_k \rangle \langle \|\mathbf{y}_k - \mathbf{A} \mathbf{H}_k \mathbf{C}(s_k) \mathbf{x}\|^2 \rangle_{q(s_k)} \\ &\approx \sum_k \langle \beta_k \rangle \|\mathbf{y}_k - \mathbf{A} \mathbf{H}_k \mathbf{C}(\bar{s}_k) \mathbf{x}\|^2 \\ &+ \sum_k \langle \beta_k \rangle \mathbf{x}^t \text{trace}([\mathbf{O}_{k1}(\bar{s}_k), \mathbf{O}_{k2}(\bar{s}_k), \mathbf{O}_{k3}(\bar{s}_k)]^t \\ &[\mathbf{O}_{k1}(\bar{s}_k), \mathbf{O}_{k2}(\bar{s}_k), \mathbf{O}_{k3}(\bar{s}_k)] \mathbf{\Xi}_k) \mathbf{x} \\ &= \sum_k \langle \beta_k \rangle \|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}(\bar{s}_k) \mathbf{x}\|^2 + \sum_k \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \langle \beta_k \rangle \xi_{kij} \mathbf{x}^t \mathbf{O}_{ki}(\bar{s}_k)^t \mathbf{O}_{kj}(\bar{s}_k) \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde $\mathbf{\Xi}_k$ es la matriz de covarianza definida con los términos ξ_{kij} , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, de la forma

$$\mathbf{\Xi}_k = \begin{pmatrix} \xi_{k11} & \xi_{k12} & \xi_{k13} \\ \xi_{k21} & \xi_{k22} & \xi_{k23} \\ \xi_{k31} & \xi_{k32} & \lambda_{k33} \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Sustituyendo la Ec. (5.24) en las Ecs. (5.13) y (5.14), obtenemos una distribución Gaussiana multivariante para la distribución a posteriori $q_c(\mathbf{x})$ con la forma:

$$q_c(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x} | \mathbf{E}_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}], \text{cov}_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]), \quad (5.26)$$

cuyos parámetros son

$$\mathbf{E}_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}] = \text{cov}_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}] \left[\sum_k \langle \beta_k \rangle \mathbf{B}_k(\bar{\mathbf{s}}_k)^t \mathbf{y}_k \right], \quad (5.27)$$

para ambas configuraciones, mientras la matriz de covarianza inversa depende de la configuración, esto es, para $c = \ell 1$ resulta

$$\begin{aligned} \text{cov}_{q_{\ell 1}(\mathbf{x})}^{-1}[\mathbf{x}] &= \sum_k \langle \beta_k \rangle \mathbf{B}_k(\bar{\mathbf{s}}_k)^t \mathbf{B}_k(\bar{\mathbf{s}}_k) + \sum_k \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \langle \beta_k \rangle \xi_{kij} \mathbf{O}_{ki}(\bar{\mathbf{s}}_k)^t \mathbf{O}_{kj}(\bar{\mathbf{s}}_k) \\ &\quad + \lambda_2 \left(\langle \alpha_2^h \rangle \Delta^h \mathbf{W}(w_2^h) \Delta^h + \langle \alpha_2^v \rangle \Delta^v \mathbf{W}(w_2^v) \Delta^v \right) \\ &\quad + (1 - \lambda_2) \langle \alpha_1 \rangle \mathcal{C}^t \mathcal{C}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

y para $c = TV$ tenemos

$$\begin{aligned} \text{cov}_{q_{TV}(\mathbf{x})}^{-1}[\mathbf{x}] &= \sum_k \langle \beta_k \rangle \mathbf{B}_k(\bar{\mathbf{s}}_k)^t \mathbf{B}_k(\bar{\mathbf{s}}_k) \\ &\quad + \sum_k \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \langle \beta_k \rangle \xi_{kij} \mathbf{O}_{ki}(\bar{\mathbf{s}}_k)^t \mathbf{O}_{kj}(\bar{\mathbf{s}}_k) \\ &\quad + \lambda_3 \langle \alpha_3 \rangle \left(\Delta^h \mathbf{W}(w_3) \Delta^h + \Delta^v \mathbf{W}(w_3) \Delta^v \right) \\ &\quad + (1 - \lambda_3) \langle \alpha_1 \rangle \mathcal{C}^t \mathcal{C}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

donde Δ^h y Δ^v representan, como en el capítulo anterior, las matrices de convolución de $PN \times PN$ asociada respectivamente con las diferencias en horizontal y en vertical de primer orden, y $\mathbf{W}(\mathbf{w})$ con $\forall \mathbf{w} \in (R^+)^{PN}$ es una matriz diagonal de $PN \times PN$ definida por la Ec. (4.26).

Como en el capítulo anterior, las matrices $\mathbf{W}(\mathbf{w}_3)$, $\mathbf{W}(\mathbf{w}_2^h)$ y $\mathbf{W}(\mathbf{w}_2^v)$ se interpretan como matrices de adaptación espacial ya que el suavizado horizontal y vertical para cada pixel depende de la fuerza con la que varíen los gradientes horizontal y vertical. Igualmente, la estimación de los parámetros $\mathbf{w}_2^h$ y $\mathbf{w}_2^v$, para el modelo $\ell 1$ y el parámetro $\mathbf{w}_3$ para el modelo TV ya fueron definidos en el apartado 4.3.1, resultando

$$w_{2i}^h = \mathbf{E}_{q_{\ell 1}(\mathbf{x})}[(\Delta_i^h(\mathbf{x}))^2] = (\Delta_i^h(\mathbf{E}_{q_{\ell 1}(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]))^2 + \text{traza}(\text{cov}_{q_{\ell 1}(\mathbf{x})}[\mathbf{x}] \Delta_i^h \delta_i \Delta_i^h), \quad (5.30)$$

$$w_{2i}^v = \mathbf{E}_{q_{\ell 1}(\mathbf{x})}[(\Delta_i^v(\mathbf{x}))^2] = (\Delta_i^v(\mathbf{E}_{q_{\ell 1}(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]))^2 + \text{traza}(\text{cov}_{q_{\ell 1}(\mathbf{x})}[\mathbf{x}] \Delta_i^v \delta_i \Delta_i^v) \quad (5.31)$$

y

$$\begin{aligned}
w_{3i} &= E_{q_{TV}(\mathbf{x})}[(\Delta_i^h(\mathbf{x}))^2 + \Delta_i^v(\mathbf{x})^2] \\
&= (\Delta_i^h(E_{q_{TV}(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]))^2 + (\Delta_i^v(E_{q_{TV}(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]))^2 \\
&+ \text{traza}(\text{cov}_{q_{TV}(\mathbf{x})}[\mathbf{x}] \Delta^{ht} \delta_i \Delta^h) \\
&+ \text{traza}(\text{cov}_{q_{TV}(\mathbf{x})}[\mathbf{x}] \Delta^{vt} \delta_i \Delta^v)
\end{aligned} \tag{5.32}$$

respectivamente.

También, para obtener la Ec. (5.15), de forma explícita, necesitamos calcular la expresión $\langle \|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}\|^2 \rangle_{q(\mathbf{x})}$. Para ello, aplicamos la aproximación de $\mathbf{B}(\mathbf{s}_k)$ dada en la Ec. (5.22), obteniendo

$$\begin{aligned}
&\langle \|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}\|^2 \rangle_{q(\mathbf{x})} \\
&= \langle \|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}(\bar{\mathbf{s}}_k)\mathbf{x} - [\mathbf{O}_{k1}(\bar{\mathbf{s}}_k)\mathbf{x}, \mathbf{O}_{k1}(\bar{\mathbf{s}}_k)\mathbf{x}, \mathbf{O}_{k1}(\bar{\mathbf{s}}_k)\mathbf{x}](\mathbf{s}_k - \bar{\mathbf{s}}_k)\|^2 \rangle_{q(\mathbf{x})} \\
&= \|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}(\bar{\mathbf{s}}_k)E_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}] - [\mathbf{O}_{k1}(\bar{\mathbf{s}}_k)E_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}], \mathbf{O}_{k2}(\bar{\mathbf{s}}_k)E_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}], \\
&\mathbf{O}_{k3}(\bar{\mathbf{s}}_k)E_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]](\mathbf{s}_k - \bar{\mathbf{s}}_k)\|^2 + \text{trace}[\mathbf{B}(\bar{\mathbf{s}}_k)^t \mathbf{B}(\bar{\mathbf{s}}_k) \text{cov}_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]] \\
&+ 2[\text{trace}[\mathbf{B}(\bar{\mathbf{s}}_k)^t \mathbf{O}_{k1}(\bar{\mathbf{s}}_k) \text{cov}_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]], \text{trace}[\mathbf{B}(\bar{\mathbf{s}}_k)^t \mathbf{O}_{k2}(\bar{\mathbf{s}}_k) \text{cov}_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]], \\
&\text{trace}[\mathbf{B}(\bar{\mathbf{s}}_k)^t \mathbf{O}_{k3}(\bar{\mathbf{s}}_k) \text{cov}_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]]](\mathbf{s}_k - \bar{\mathbf{s}}_k) \\
&+ (\mathbf{s}_k - \bar{\mathbf{s}}_k)^t \Psi_k (\mathbf{s}_k - \bar{\mathbf{s}}_k)
\end{aligned} \tag{5.33}$$

siendo

$$\Psi_k = \begin{pmatrix} \Psi_{k11} & \Psi_{k12} & \Psi_{k13} \\ \Psi_{k21} & \Psi_{k22} & \Psi_{k23} \\ \Psi_{k31} & \Psi_{k32} & \Psi_{k33} \end{pmatrix}, \tag{5.34}$$

con $\Psi_{kij} = \text{trace}[\mathbf{O}_{ki}(\bar{\mathbf{s}}_k)^t \mathbf{O}_{kj}(\bar{\mathbf{s}}_k) \text{cov}_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]]$, para $i, j = 1, 2, 3$. La distribución $q(\mathbf{s}_k)$ puede expresarse a partir de las Ecs. (5.15) y (5.33) como la distribución Gaussiana

$$q(\mathbf{s}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{s}_k | \langle \mathbf{s}_k \rangle, \Xi_k) \tag{5.35}$$

con los parametros

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{s}_k \rangle &= \Xi_k \left[(\Xi_k^p)^{-1} \bar{\mathbf{s}}_k^p + \langle \beta_k \rangle \Gamma_k \bar{\mathbf{s}}_k + \langle \beta_k \rangle \Psi_k \bar{\mathbf{s}}_k \right. \\
&+ \langle \beta_k \rangle \left[(\mathbf{y}_k - \mathbf{B}(\bar{\mathbf{s}}_k)E_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}])^t \mathbf{O}_{k1}(\bar{\mathbf{s}}_k)E_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}], \right. \\
&(\mathbf{y}_k - \mathbf{B}(\bar{\mathbf{s}}_k)E_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}])^t \mathbf{O}_{k2}(\bar{\mathbf{s}}_k)E_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}], \\
&(\mathbf{y}_k - \mathbf{B}(\bar{\mathbf{s}}_k)E_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}])^t \mathbf{O}_{k3}(\bar{\mathbf{s}}_k)E_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]]^t \\
&\left. \left. - \langle \beta_k \rangle [\text{trace}[\mathbf{B}(\bar{\mathbf{s}}_k)^t \mathbf{O}_{k1}(\bar{\mathbf{s}}_k) \text{cov}_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]], \right. \right. \\
&\left. \left. \text{trace}[\mathbf{B}(\bar{\mathbf{s}}_k)^t \mathbf{O}_{k2}(\bar{\mathbf{s}}_k) \text{cov}_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]], \text{trace}[\mathbf{B}(\bar{\mathbf{s}}_k)^t \mathbf{O}_{k3}(\bar{\mathbf{s}}_k) \text{cov}_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]]] \right] \right]^t
\end{aligned} \tag{5.36}$$

y

$$\Xi_k^{-1} = (\Xi_k^p)^{-1} + \langle \beta_k \rangle \Psi_k + \langle \beta_k \rangle \Gamma_k, \quad (5.37)$$

con

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} \Gamma_{k11} & \Gamma_{k12} & \Gamma_{k13} \\ \Gamma_{k21} & \Gamma_{k22} & \Gamma_{k23} \\ \Gamma_{k31} & \Gamma_{k32} & \Gamma_{k33} \end{pmatrix}, \quad (5.38)$$

donde $\Gamma_{kij} = E_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]^t \mathbf{O}_{ki}(\bar{\mathbf{s}}_k)^t \mathbf{O}_{kj}(\bar{\mathbf{s}}_k) E_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]$, para $i, j = 1, 2, 3$.

Note como la Ec. (5.35), junto con las Ecs. (5.36) y (5.37), nos proporcionan un método de registrado que estima la media definida en la Ec. (5.36) en base a la media estimada en la iteración anterior. Este método de registrado se comporta como una generalización estocástica del método de Lucas-Kanade Lucas y Kanade (1981) Baker y Matthews (2004) aplicado al problema de la SR. El método clásico de Lucas-Kanade se obtendría como caso particular de la Ec. (5.36) con tan solo hacer la matriz Ψ_k cero. La matriz Ψ_k representa la incertidumbre de la imagen de AR obtenida en el proceso de estimación del movimiento. Como se mostrará experimentalmente, esta nos ayudará a encontrar una estimación del movimiento y de la imagen de AR con mayor precisión.

En esta memoria hemos considerado la presencia de movimientos de traslación y rotación en un mismo plano entre las observaciones. Pero el marco propuesto permite modelos de movimiento más complejos, tales como movimientos afines o proyectivos con 6 u 8 grados de libertad respectivamente. Para ello bastaría con redefinir la Ec. (3.6) de la forma apropiada y obtener las 6 u 8 matrices $PN \times PN \mathbf{N}_i(\bar{\mathbf{s}}_k)$ en la Ec. (5.17), respectivamente. El resto de las ecuaciones de estimación de movimiento podría derivarse de las ecuaciones de este apartado.

5.3.2. Estimación de los Hiperparámetros

Por último obtendremos las distribuciones para los hiperparámetros α_1 , α_2 , α_3 y $\{\beta_k\}$ para $c \in \{\ell 1, TV\}$. A partir de las Ecs. (5.8), (5.9) y (5.10) se obtienen las distribuciones de los hiperparámetros, que son distribuciones Gamma como las obtenidas en el apartado 4.3.2. Así los hiperparámetros $\{\beta_k\}$ resultan definidas por las distribuciones:

$$q(\beta_k) \propto \beta_k^{\frac{N}{2}-1+a_{\beta_k}^0} \exp \left[-\beta_k \left(b_{\beta_k}^0 + \frac{E_{q_c(\mathbf{x})}[\|\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)\mathbf{x}\|^2]}{2} \right) \right] \quad (5.39)$$

y el hiperparámetro α_1 por la distribución

$$q(\alpha_1) \propto \alpha_1^{\frac{PN}{2}-1+a_{\alpha_1}^0} \exp \left[-\alpha_1 \left(b_{\alpha_1}^0 + \frac{\mathbb{E}_{q_c(\mathbf{x})} [\|\mathcal{C}\mathbf{x}\|^2]}{2} \right) \right]. \quad (5.40)$$

En el caso en que $c = \ell 1$ las distribuciones de los hiperparámetros α_2^h y α_2^v serían

$$q(\alpha_2^h) \propto (\alpha_2^h)^{\frac{PN}{4}-1+a_{\alpha_2^h}^0} \exp \left[-\alpha_2^h \left(b_{\alpha_2^h}^0 + \sum_{i=1}^{PN} \sqrt{w_{2i}^h} \right) \right], \quad (5.41)$$

y

$$q(\alpha_2^v) \propto (\alpha_2^v)^{\frac{PN}{4}-1+a_{\alpha_2^v}^0} \exp \left[-\alpha_2^v \left(b_{\alpha_2^v}^0 + \sum_{i=1}^{PN} \sqrt{w_{2i}^v} \right) \right]. \quad (5.42)$$

Y en el caso en que $c = TV$ la distribución para el hiperparámetros α_3 resulta ser

$$q(\alpha_3) \propto (\alpha_3)^{\frac{PN}{2}-1+a_{\alpha_3}^0} \exp \left[-\alpha_3 \left(b_{\alpha_3}^0 + \sum_{i=1}^{PN} \sqrt{w_{3i}} \right) \right]. \quad (5.43)$$

Por tanto, las estimaciones de los hiperparámetros serán de la forma:

$$\langle \beta_k \rangle = \frac{\frac{N}{2} + a_{\beta_k}^0}{\frac{1}{2} \left(\|y_k - \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k) \mathbb{E}_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]\|^2 + \text{traza}(\text{cov}_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}] \mathbf{B}_k^t(\mathbf{s}_k) \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)) \right) + b_{\beta_k}^0}, \quad (5.44)$$

$$\langle \alpha_1 \rangle = \frac{PN + 2a_{\alpha_1}^0}{\|\mathcal{C} \mathbb{E}_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}]\|^2 + \text{traza}(\text{cov}_{q_c(\mathbf{x})}[\mathbf{x}] \mathcal{C}^t \mathcal{C}) + 2b_{\alpha_1}^0}. \quad (5.45)$$

Cuando $c = \ell 1$

$$\langle \alpha_2^h \rangle = \frac{\frac{PN}{4} + a_{\alpha_2^h}^0}{\sum_{i=1}^{PN} \sqrt{w_{2i}^h} + b_{\alpha_2^h}^0}, \quad (5.46)$$

y

$$\langle \alpha_2^v \rangle = \frac{\frac{PN}{4} + a_{\alpha_2^v}^0}{\sum_{i=1}^{PN} \sqrt{w_{2i}^v} + b_{\alpha_2^v}^0}, \quad (5.47)$$

y para $c = TV$

$$\langle \alpha_3 \rangle = \frac{\frac{PN}{2} + a_{\alpha_3}^0}{\sum_{i=1}^{PN} \sqrt{w_{3i}} + b_{\alpha_3^h}^0}. \quad (5.48)$$

5.3.3. Método de Superresolución con Estimación de Movimiento

El procedimiento de estimación de la imagen de AR junto al movimiento y los hiperparámetros descrita en las secciones anteriores se resume en el algoritmo 5.1, para la mezcla del modelo SAR con el modelo ℓ_1 , y en el algoritmo 5.2 en el caso que se mezclen el modelo SAR con el modelo TV.

Algoritmo 5.1 SR y estimación de movimiento usando la combinación de modelos SAR y ℓ_1 .

Entrada: Valores iniciales para la imagen de AR, para los parámetros del movimiento y para los hiperparámetros.

- 1: **mientras** no se alcance el criterio de convergencia **hacer**
 - 2: Estimar la distribución de la imagen de AR mediante la Ec. (5.11).
 - 3: Calcular los vectores de adaptabilidad $\mathbf{w}^h$ y $\mathbf{w}^v$ usando las Ecs. (5.30) y (5.31).
 - 4: Estimar los parámetros de movimiento mediante la Ec. (5.36)
 - 5: Estimar la distribuciones de los hiperparámetros α_1 , $\{\beta_k\}$ y α_2 usando las Ecs. (5.45), (5.44), (5.46), (5.47).
 - 6: **fin mientras**
-

Algoritmo 5.2 SR y estimación de movimiento usando la combinación de modelos SAR y TV

Entrada: Valores iniciales para la imagen de AR, para los parámetros del movimiento y para los hiperparámetros.

- 1: **mientras** no se alcance el criterio de convergencia **hacer**
 - 2: Estimar la distribución de la imagen de AR mediante la Ec. (5.12)
 - 3: Calcular el vector de adaptabilidad $\mathbf{w}$ usando la Ec. (5.32).
 - 4: Estimar los parámetros de movimiento mediante la Ec. (5.36)
 - 5: Estimar la distribuciones de los hiperparámetros α_1 , $\{\beta_k\}$ y α_3 usando las Ecs. (5.45), (5.44) y (5.48).
 - 6: **fin mientras**
-

5.4. Experimentos

En esta sección analizaremos la calidad de la imagen de AR y la precisión del registrado obtenidos con los algoritmos de SR propuestos 5.1 y 5.2. Para ello, realizaremos dos tipos de experimentos. En el primer experimento utilizaremos las secuencias de 5 observaciones simuladas y utilizadas en el apartado 4.4 del capítulo anterior, y en el otro experimento utilizaremos observaciones reales obtenidas en Farsiu (2004) y secuencias de imágenes obtenidas por nosotros con una cámara Canon Ixus700.

En el experimento de 5 observaciones simularemos el registrado inexacto inicial de los métodos de SR con estimación de movimiento como son los algoritmos 5.1 y 5.2, añadiendo ruido Gaussiano a los valores medios de los parámetros de movimiento. En concreto, añadiremos ruido Gaussiano con desviación típica de 1 a los valores medios de los parámetros de desplazamientos horizontal y vertical y los valores de los ángulos de rotación los obtendremos muestreando una distribución uniforme en el intervalo $[-2^\circ, 2^\circ]$. Además se comparan las imágenes de AR estimadas con el método de interpolación bilineal (BBC), el método robusto (ZMT), Zomet et al. (2001) basado en un algoritmo Back-Projection con valor 3 para la mediana de filtrado, el método de SR robusto (RSR) propuesto en Farsiu et al. (Oct. 2004), el método de SR variacional (TV) en Babacan et al. (2011) basado en el modelo a priori TV, el algoritmo de SR basado en 3.1 (SARREG), en donde se ha incluido la estimación del movimiento de forma análoga a como se define en Ec. (5.36), el algoritmo de SR 3.2 (ℓ_1) propuesto en Villena et al. (2009a) con estimación de movimiento, el algoritmo de SR 5.1 con $c = \ell_1$ propuesto en Villena et al. (2010b) basado en la combinación de modelos a priori SAR y la norma ℓ_1 y denotado como(ℓ_1 -SAR) y por último el algoritmo de SR 5.2 con $c = TV$ basado en Villena et al. (2010a) denotado por (TV-SAR) que combina los modelos a priori SAR y TV. Los valores de los parámetros de mezcla λ_2 en el algoritmo 5.1, y λ_3 en el algoritmo 5.2 se han obtenido experimentalmente, probando valores desde 0 hasta 1 en incrementos de 0,05. Obsérvese que los algoritmos 5.1 y 5.2 coinciden con el método de SR de los algoritmos utilizados en ℓ_1 y el TV cuando $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 1$ respectivamente. Igualmente, cuando $\lambda_2 = 0$ o $\lambda_3 = 0$, coinciden con el algoritmo SARREG.

Como en los capítulos anteriores utilizaremos el PSNR definido en la Ec. (3.63) para comparar la calidad de las imágenes estimadas. En todos los casos utilizaremos el mismo criterio de parada que en el capítulo anterior, Ec. (3.64).

Debemos prestar especial atención al paso 4 de los algoritmos 5.1 y 5.2 que es un proceso iterativo de estimación del movimiento basado en las Ecs. (5.35), (5.36) y (5.37). En todos los experimentos este proceso iterativo se ha limitado a 35 iteraciones como máximo y se ha utilizado el siguiente

criterio de parada

$$\left\| \mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{H}_k\mathbf{C}(\mathbf{s}_k^{j+1})\hat{\mathbf{x}} \right\|^2 > \left\| \mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{H}_k\mathbf{C}(\mathbf{s}_k^j)\hat{\mathbf{x}} \right\|^2, \quad (5.49)$$

donde $\mathbf{s}_k^j$ y $\mathbf{s}_k^{j+1}$ representan los parámetros de movimiento estimados en la iteración anterior y presente respectivamente.

Por razones de eficiencia y debido a la gran cantidad de ejecuciones requeridas en cada de experimento, hemos aplicado la aproximación de Jacobi para la estimación de los hiperparámetros en todos los casos.

Para valorar la calidad de los parámetros de movimiento estimados mediante los distintos métodos nos fijaremos en el valor absoluto de la diferencia entre el valor verdadero y el estimado para cada parámetro de movimiento.

En las tablas 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 se muestran los valores medios del PSNR de las imágenes de AR obtenidas en este experimento. Como en el capítulo anterior, para facilitar su examen se han rotulado en color verde los resultados de la combinación de modelos cuando sean mejores que los modelos por separado, y en rojo cuando, además, el resultado sea el mejor de todos. Por el contrario, cuando el mejor resultado haya sido obtenido utilizando un único modelo a priori lo rotulamos en color azul. Podemos observar cómo las reconstrucciones de la imagen de AR obtenidas con los métodos propuestos se comportan, en general, mejor que el resto.

Para estudiar la calidad del registrado en el experimento con 5 observaciones, compararemos los resultados de registrado obtenidos por los algoritmos propuestos en esta memoria con los métodos de registrado de Lucas-Kanade Lucas y Kanade (1981), Baker y Matthews (2004), que notaremos como (LU) y el método de Vandewalle propuesto en Vandewalle et al. (2007), usando el software desarrollado por los autores, que notaremos como (VAN). Estos dos últimos métodos han sido aplicados sobre la serie de observaciones previamente interpoladas bilinealmente a imágenes en AR. Para medir la precisión del registrado utilizaremos el error de registrado obtenido por $|\mathbf{s}_k - \langle \mathbf{s}_k \rangle|$, donde $\langle \mathbf{s}_k \rangle$ representa el vector de movimiento estimado.

En la figura 5.1 se muestran las medias de los errores de registrado de todas las observaciones de la imagen 3.2(h) para los métodos VAN, LU, ℓ_1 , TV-SAR y ℓ_1 -SAR. Como se puede apreciar en este gráfico, y en general, los errores de registrado obtenidos con el método de Vandewalle resulta sensiblemente superiores al resto de métodos comparados. Los errores de registrado dependen de las características de la imagen. Así por ejemplo, y como puede observarse en la figura 5.2, en el caso de la imagen 3.2(b) los errores de registrado con el método LU son del orden de los del método VAN, aunque mejores, y ambos sensiblemente mayores que los de los métodos propuestos en esta memoria.

Por claridad en el resto de las gráficas no se representan los resultados obtenidos por el método VAN. Así por ejemplo, en las figuras 5.3 y 5.4

se muestran los errores de registrado para las imágenes 3.2(c) y 3.2(f) respectivamente.

En base a los resultados obtenidos, se puede decir que los métodos de registrado propuestos en esta memoria se comportan en general mejor que el resto de los métodos, especialmente para niveles bajos de ruido y como veremos a continuación, cuando el nivel de ruido es alto los errores del registrado de nuestro algoritmo no afecta a la calidad de la imagen de AR obtenida por nuestros algoritmo.

Un aspecto interesante a estudiar sería como influye la calidad de nuestro registrado en la calidad de las imágenes de AR obtenidas a partir de nuestros métodos de SR. Para ello, en la figura 5.5 se compara la calidad de las reconstrucciones de la imagen 3.2(h), obtenidas mediante los distintos métodos, utilizando, por un lado, la información exacta de los movimientos, y por otro, la obtenida mediante el método de estimación del movimiento. En la figura 5.6 se muestran las diferencias entre la calidad de las reconstrucciones obtenidas de una y de otra forma.

Los resultados obtenidos en el experimento simulado con 5 observaciones nos indican que el método propuesto es muy preciso.

En las figuras 5.7 y 5.8 se muestran la reconstrucciones de imágenes de AR para los distintos métodos a partir de la secuencia de 5 observaciones correspondientes a la imagen original 3.2(c) y las diferencias absolutas entre las imágenes de AR estimadas y la original 3.2(c) representada en escala de color con el mismo criterio utilizado en los capítulos anteriores. También en las figuras 5.9 y 5.10 se muestran la variación de la calidad de la imagen de AR obtenida mediante combinación de modelos para los distintos valor del parámetro de mezcla y los errores de la estimación de los parámetros del movimiento, respectivamente. Observe como en la figura 5.10 no aparecen los resultados del registrado para la primera imagen tomada como imagen de referencia. De modo similar, las figuras 5.11, 5.12, 5.13, 5.14 y 5.15, 5.16, 5.17, 5.18 muestran las reconstrucciones de AR, las diferencias absolutas entre las imágenes de AR estimadas y la imagen original, la variación de la calidad de la reconstrucción con respecto los parámetros de mezcla y la calidad del registrado para las imágenes 3.2(e) y 3.2(h), respectivamente.

Para el experimento con observaciones reales usaremos imágenes reales obtenidas en Farsiu (2004) y las observaciones obtenidas por nosotros. En particular, tomaremos por un lado las 20 primeras observaciones de la secuencia llamada *text*, las 20 observaciones de la secuencia denominada *adyon_rotation* y por otro, las 19 observaciones capturadas por nosotros. Se han aplicado, a las tres secuencias, los siguientes métodos de SR: interpolación bilineal (BBC), el método robusto (ZMT), Zomet et al. (2001) basado en un algoritmo Back-Projection con valor 3 para la mediana de filtrado, el método de SR robusto (RSR) propuesto en Farsiu et al. (Oct. 2004), el algoritmo de SR 3.2 (ℓ_1) propuesto en Villena et al. (2009a) con estimación

Tabla 5.1: Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones para los niveles de ruido entre 10db y 20db (imágenes 3.2(a) a 3.2(d)).

Imagen $\mathbf{x}$	Algoritmo	SNR 10db	SNR 15db	SNR 20db
a 	BBC	$23.02 \pm 4.2\text{e-}03$	$23.04 \pm 9.3\text{e-}04$	$23.04 \pm 7.8\text{e-}04$
	RSR	$24.68 \pm 3.6\text{e-}01$	$24.88 \pm 3.7\text{e-}01$	$24.47 \pm 2.6\text{e-}01$
	ZMT	$23.79 \pm 3.8\text{e-}01$	$24.06 \pm 1.0\text{e+}00$	$24.63 \pm 3.4\text{e-}01$
	SARREG	$29.65 \pm 1.7\text{e-}02$	$33.38 \pm 5.9\text{e-}02$	$37.38 \pm 2.4\text{e-}02$
	TV	$32.61 \pm 4.7\text{e-}02$	$36.41 \pm 8.3\text{e-}02$	$40.02 \pm 1.0\text{e-}01$
	ℓ_1	$33.72 \pm 1.3\text{e-}01$	$37.32 \pm 7.2\text{e-}02$	$41.54 \pm 6.9\text{e-}02$
	TV-SAR	$32.78 \pm 3.4\text{e-}02$	$36.59 \pm 6.8\text{e-}02$	$40.28 \pm 7.8\text{e-}02$
	$\lambda = 0.95$		$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.85$
	ℓ_1 -SAR	$33.72 \pm 1.3\text{e-}01$	$37.32 \pm 7.2\text{e-}02$	$41.60 \pm 7.2\text{e-}02$
	$\lambda = 1.00$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 0.95$
b 	BBC	$16.37 \pm 4.3\text{e-}03$	$16.38 \pm 1.2\text{e-}03$	$16.38 \pm 3.1\text{e-}04$
	RSR	$17.73 \pm 6.7\text{e-}01$	$18.07 \pm 7.1\text{e-}01$	$17.06 \pm 6.1\text{e-}01$
	ZMT	$17.62 \pm 7.9\text{e-}01$	$17.30 \pm 8.9\text{e-}01$	$16.95 \pm 5.2\text{e-}01$
	SARREG	$26.37 \pm 1.7\text{e-}02$	$29.97 \pm 1.7\text{e-}02$	$34.75 \pm 5.1\text{e-}02$
	TV	$29.09 \pm 1.3\text{e-}01$	$33.23 \pm 6.7\text{e-}02$	$37.64 \pm 2.1\text{e-}01$
	ℓ_1	$29.30 \pm 7.7\text{e-}02$	$33.71 \pm 1.2\text{e-}01$	$38.55 \pm 1.3\text{e-}01$
	TV-SAR	$29.90 \pm 1.1\text{e-}01$	$34.11 \pm 8.4\text{e-}03$	$38.42 \pm 2.2\text{e-}02$
	$\lambda = 0.80$		$\lambda = 0.85$	$\lambda = 0.85$
	ℓ_1 -SAR	$29.54 \pm 8.1\text{e-}02$	$34.01 \pm 7.7\text{e-}02$	$38.75 \pm 8.6\text{e-}02$
	$\lambda = 0.95$		$\lambda = 0.90$	$\lambda = 0.85$
c 	BBC	$24.72 \pm 2.9\text{e-}03$	$24.74 \pm 3.1\text{e-}03$	$24.74 \pm 8.3\text{e-}04$
	RSR	$26.48 \pm 6.1\text{e-}01$	$26.78 \pm 6.4\text{e-}01$	$25.52 \pm 6.1\text{e-}01$
	ZMT	$26.13 \pm 6.4\text{e-}01$	$26.16 \pm 1.0\text{e+}00$	$25.16 \pm 2.7\text{e-}01$
	SARREG	$32.39 \pm 4.2\text{e-}02$	$34.66 \pm 9.4\text{e-}03$	$38.96 \pm 2.8\text{e-}02$
	TV	$33.31 \pm 2.6\text{e-}02$	$35.87 \pm 8.5\text{e-}02$	$39.44 \pm 4.5\text{e-}02$
	ℓ_1	$33.77 \pm 6.3\text{e-}02$	$35.92 \pm 2.8\text{e-}02$	$39.51 \pm 1.6\text{e-}02$
	TV-SAR	$34.20 \pm 8.7\text{e-}02$	$37.02 \pm 1.2\text{e-}01$	$40.50 \pm 3.0\text{e-}02$
	$\lambda = 0.85$		$\lambda = 0.85$	$\lambda = 0.75$
	ℓ_1 -SAR	$34.01 \pm 9.0\text{e-}02$	$36.87 \pm 2.6\text{e-}02$	$40.57 \pm 2.0\text{e-}02$
	$\lambda = 0.90$		$\lambda = 0.85$	$\lambda = 0.75$
d 	BBC	$16.44 \pm 2.4\text{e-}03$	$16.45 \pm 1.2\text{e-}03$	$16.45 \pm 6.0\text{e-}05$
	RSR	$17.90 \pm 7.5\text{e-}02$	$17.39 \pm 6.7\text{e-}01$	$17.40 \pm 8.1\text{e-}01$
	ZMT	$17.07 \pm 3.6\text{e-}01$	$16.59 \pm 8.7\text{e-}02$	$17.19 \pm 8.6\text{e-}01$
	SARREG	$24.90 \pm 3.3\text{e-}02$	$27.21 \pm 3.1\text{e-}02$	$33.44 \pm 1.1\text{e-}01$
	TV	$29.26 \pm 8.5\text{e-}02$	$34.61 \pm 1.8\text{e-}01$	$40.21 \pm 1.3\text{e-}01$
	ℓ_1	$30.39 \pm 7.2\text{e-}02$	$36.18 \pm 9.0\text{e-}02$	$42.08 \pm 8.1\text{e-}02$
	TV-SAR	$29.26 \pm 8.5\text{e-}02$	$34.67 \pm 1.1\text{e-}01$	$40.21 \pm 1.3\text{e-}01$
	$\lambda = 1.00$		$\lambda = 0.95$	$\lambda = 1.00$
	ℓ_1 -SAR	$30.39 \pm 7.2\text{e-}02$	$36.18 \pm 9.0\text{e-}02$	$42.08 \pm 8.1\text{e-}02$
	$\lambda = 1.00$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$

Tabla 5.2: Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones para los niveles de ruido entre $10db$ y $20db$ (imágenes 3.2(e) a 3.2(h)).

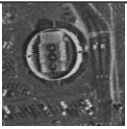
Imagen $\mathbf{x}$	Algoritmo	SNR 10db	SNR 15db	SNR 20db
e 	BBC	$25.33 \pm 2.8e-03$	$25.33 \pm 2.9e-04$	$25.33 \pm 3.4e-05$
	RSR	$26.07 \pm 2.7e-01$	$26.09 \pm 2.2e-01$	$25.89 \pm 1.7e-01$
	ZMT	$25.50 \pm 1.8e-02$	$25.81 \pm 3.1e-01$	$25.64 \pm 7.0e-02$
	SARREG	$31.90 \pm 5.2e-02$	$36.13 \pm 1.2e-02$	$40.36 \pm 1.5e-01$
	TV	$33.67 \pm 3.7e-02$	$37.10 \pm 4.2e-02$	$41.26 \pm 1.4e-01$
	ℓ_1	$33.51 \pm 2.2e-02$	$36.78 \pm 3.5e-02$	$40.96 \pm 7.8e-02$
	TV-SAR	$33.91 \pm 3.3e-02$	$37.37 \pm 2.6e-02$	$41.44 \pm 1.3e-01$
		$\lambda = 0.90$	$\lambda = 0.85$	$\lambda = 0.85$
	ℓ_1 -SAR	$33.85 \pm 1.7e-02$	$37.29 \pm 1.7e-02$	$41.36 \pm 9.5e-02$
		$\lambda = 0.90$	$\lambda = 0.80$	$\lambda = 0.80$
f 	BBC	$24.44 \pm 5.9e-04$	$24.45 \pm 1.2e-04$	$24.45 \pm 3.1e-04$
	RSR	$26.38 \pm 3.5e-01$	$25.20 \pm 4.2e-01$	$25.93 \pm 1.0e+00$
	ZMT	$25.14 \pm 5.6e-01$	$24.97 \pm 2.8e-01$	$24.96 \pm 4.1e-01$
	SARREG	$31.57 \pm 3.5e-02$	$33.14 \pm 8.4e-03$	$33.34 \pm 2.5e-03$
	TV	$33.80 \pm 1.4e-02$	$37.21 \pm 6.8e-02$	$41.56 \pm 3.5e-02$
	ℓ_1	$32.48 \pm 4.2e-02$	$37.15 \pm 9.6e-02$	$41.60 \pm 4.3e-02$
	TV-SAR	$34.24 \pm 2.0e-02$	$37.82 \pm 4.0e-02$	$42.26 \pm 1.6e-02$
		$\lambda = 0.90$	$\lambda = 0.75$	$\lambda = 0.55$
	ℓ_1 -SAR	$32.78 \pm 4.1e-02$	$37.80 \pm 5.0e-02$	$42.30 \pm 2.0e-02$
		$\lambda = 0.90$	$\lambda = 0.75$	$\lambda = 0.50$
g 	BBC	$24.52 \pm 1.9e-03$	$24.55 \pm 2.1e-03$	$24.56 \pm 5.2e-04$
	RSR	$25.62 \pm 7.0e-01$	$26.19 \pm 4.2e-01$	$26.57 \pm 1.7e-01$
	ZMT	$24.82 \pm 2.7e-01$	$25.30 \pm 5.0e-01$	$26.10 \pm 9.0e-01$
	SARREG	$32.69 \pm 2.9e-02$	$35.33 \pm 1.3e-02$	$40.30 \pm 1.4e-02$
	TV	$33.45 \pm 4.4e-02$	$37.01 \pm 1.1e-01$	$40.65 \pm 6.7e-02$
	ℓ_1	$34.07 \pm 5.9e-02$	$37.77 \pm 9.1e-02$	$41.14 \pm 6.9e-02$
	TV-SAR	$34.13 \pm 4.5e-02$	$37.73 \pm 7.3e-02$	$41.64 \pm 4.0e-02$
		$\lambda = 0.85$	$\lambda = 0.85$	$\lambda = 0.60$
	ℓ_1 -SAR	$34.16 \pm 6.4e-02$	$38.02 \pm 8.2e-02$	$41.90 \pm 5.2e-02$
		$\lambda = 0.90$	$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.70$
h 	BBC	$25.02 \pm 1.0e-02$	$25.07 \pm 3.8e-03$	$25.08 \pm 2.7e-04$
	RSR	$26.02 \pm 2.7e-01$	$26.48 \pm 1.4e-01$	$26.18 \pm 5.1e-01$
	ZMT	$25.95 \pm 4.3e-01$	$26.26 \pm 2.5e-01$	$25.42 \pm 1.9e-01$
	SARREG	$30.05 \pm 2.1e-02$	$31.17 \pm 1.6e-02$	$35.01 \pm 2.3e-02$
	TV	$31.97 \pm 2.2e-02$	$34.89 \pm 7.2e-02$	$38.25 \pm 2.8e-02$
	ℓ_1	$31.81 \pm 3.6e-02$	$34.94 \pm 4.7e-02$	$38.66 \pm 1.7e-02$
	TV-SAR	$31.99 \pm 1.5e-02$	$34.94 \pm 5.6e-02$	$38.35 \pm 2.6e-02$
		$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.90$
	ℓ_1 -SAR	$31.81 \pm 3.6e-02$	$34.94 \pm 4.7e-02$	$38.69 \pm 2.0e-02$
		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$	$\lambda = 0.95$

Tabla 5.3: Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones para los niveles de ruido entre 25db y 40db (imágenes 3.2(a) a 3.2(d)).

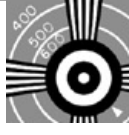
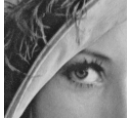
Imagen x	Algoritmo	SNR 25db	SNR 30db	SNR 40db
a 	BBC	23.04 ± 2.2e-04	23.04 ± 3.9e-05	23.04 ± 3.6e-06
	RSR	24.86 ± 1.3e+00	24.24 ± 8.2e-01	24.02 ± 4.5e-01
	ZMT	24.87 ± 1.2e+00	23.94 ± 9.9e-01	23.62 ± 3.0e-01
	SARREG	43.15 ± 7.7e-02	48.42 ± 3.0e-02	51.37 ± 1.0e-01
	TV	43.69 ± 9.5e-02	48.42 ± 2.7e-02	50.97 ± 7.3e-02
	ℓ_1	45.39 ± 7.1e-02	50.19 ± 5.0e-02	52.86 ± 8.2e-02
	TV-SAR	43.88 ± 9.6e-02	48.69 ± 5.1e-02	51.44 ± 4.1e-02
	$\lambda = 0.75$		$\lambda = 0.55$	$\lambda = 0.00$
	ℓ_1 -SAR	45.39 ± 7.1e-02	50.19 ± 5.0e-02	52.89 ± 4.3e-02
	$\lambda = 1.00$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$
b 	BBC	16.38 ± 1.4e-04	16.38 ± 2.7e-05	16.38 ± 3.0e-06
	RSR	17.87 ± 1.8e-01	17.27 ± 3.0e-01	17.88 ± 8.7e-01
	ZMT	17.30 ± 6.8e-01	17.18 ± 4.1e-01	17.76 ± 9.4e-01
	SARREG	39.57 ± 6.4e-02	43.10 ± 6.3e-01	43.92 ± 1.3e-01
	TV	41.42 ± 5.5e-01	44.55 ± 4.2e-01	45.71 ± 9.7e-01
	ℓ_1	43.15 ± 5.2e-01	45.21 ± 7.2e-01	46.33 ± 2.1e+00
	TV-SAR	43.18 ± 1.8e-01	47.23 ± 2.2e-01	48.94 ± 7.7e-02
	$\lambda = 0.70$		$\lambda = 0.65$	$\lambda = 0.45$
	ℓ_1 -SAR	43.43 ± 3.7e-01	46.53 ± 5.3e-01	49.06 ± 4.3e-01
	$\lambda = 0.80$		$\lambda = 0.85$	$\lambda = 0.55$
c 	BBC	24.74 ± 3.9e-04	24.74 ± 8.9e-05	24.74 ± 4.9e-06
	RSR	25.40 ± 7.9e-01	27.50 ± 4.8e-01	25.89 ± 9.2e-01
	ZMT	24.92 ± 2.0e-01	25.51 ± 4.6e-01	24.97 ± 2.3e-01
	SARREG	43.59 ± 5.3e-02	48.49 ± 1.3e-01	51.53 ± 5.7e-02
	TV	43.22 ± 1.4e-01	47.73 ± 1.6e-01	49.83 ± 9.3e-02
	ℓ_1	43.40 ± 1.1e-01	47.84 ± 1.3e-01	49.96 ± 5.3e-02
	TV-SAR	44.09 ± 9.5e-02	48.54 ± 1.5e-01	51.54 ± 5.8e-02
	$\lambda = 0.55$		$\lambda = 0.40$	$\lambda = 0.00$
	ℓ_1 -SAR	44.18 ± 8.2e-02	48.55 ± 1.8e-01	51.54 ± 4.6e-02
	$\lambda = 0.55$		$\lambda = 0.30$	$\lambda = 0.00$
d 	BBC	16.45 ± 1.1e-05	16.45 ± 4.0e-05	16.45 ± 2.4e-06
	RSR	17.08 ± 3.4e-01	17.26 ± 4.7e-01	17.68 ± 3.6e-01
	ZMT	16.58 ± 1.3e-01	16.63 ± 1.1e-01	16.70 ± 8.2e-02
	SARREG	38.42 ± 6.5e-02	43.79 ± 1.7e-01	46.81 ± 7.7e-02
	TV	44.33 ± 8.4e-02	46.90 ± 1.7e-01	49.00 ± 1.3e-02
	ℓ_1	47.96 ± 1.3e-01	53.18 ± 1.5e-01	55.20 ± 9.3e-02
	TV-SAR	44.40 ± 1.5e-01	46.90 ± 1.7e-01	49.00 ± 1.3e-02
	$\lambda = 0.95$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$
	ℓ_1 -SAR	47.96 ± 1.3e-01	53.18 ± 1.5e-01	55.20 ± 9.3e-02
	$\lambda = 1.00$		$\lambda = 1.00$	$\lambda = 1.00$

Tabla 5.4: Valores medios de PSNR de las imágenes de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones para los niveles de ruido entre $25db$ y $40db$ (imágenes 3.2(e) a 3.2(h)).

Imagen $\mathbf{x}$	Algoritmo	SNR 25db	SNR 30db	SNR 40db
e 	BBC	$25.33 \pm 1.4e-04$	$25.33 \pm 4.7e-05$	$25.33 \pm 1.1e-06$
	RSR	$25.95 \pm 1.9e-01$	$25.72 \pm 2.7e-02$	$25.99 \pm 4.3e-01$
	ZMT	$25.74 \pm 1.3e-01$	$25.54 \pm 7.8e-02$	$25.61 \pm 3.4e-02$
	SARREG	$44.62 \pm 2.0e-01$	$46.14 \pm 1.8e-02$	$46.58 \pm 1.1e-01$
	TV	$44.85 \pm 7.9e-02$	$45.90 \pm 6.3e-02$	$46.09 \pm 3.8e-02$
	ℓ_1	$44.77 \pm 6.0e-02$	$45.94 \pm 3.9e-02$	$46.07 \pm 4.6e-02$
	TV-SAR	$45.17 \pm 1.7e-01$	$46.29 \pm 6.2e-02$	$46.62 \pm 1.3e-01$
		$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.00$
	ℓ_1 -SAR	$44.98 \pm 7.6e-02$	$46.24 \pm 5.8e-02$	$46.58 \pm 1.1e-01$
		$\lambda = 0.80$	$\lambda = 0.10$	$\lambda = 0.00$
f 	BBC	$24.45 \pm 7.5e-05$	$24.45 \pm 1.4e-05$	$24.45 \pm 7.8e-07$
	RSR	$25.86 \pm 6.5e-01$	$25.49 \pm 7.4e-01$	$26.03 \pm 4.0e-01$
	ZMT	$25.31 \pm 6.6e-01$	$24.78 \pm 2.6e-01$	$25.54 \pm 4.0e-01$
	SARREG	$33.36 \pm 1.6e-03$	$33.36 \pm 3.2e-03$	$33.36 \pm 1.7e-03$
	TV	$46.57 \pm 9.5e-02$	$48.67 \pm 6.6e-02$	$48.96 \pm 2.5e-02$
	ℓ_1	$46.31 \pm 1.1e-01$	$48.02 \pm 5.4e-02$	$48.22 \pm 7.8e-02$
	TV-SAR	$47.38 \pm 1.4e-01$	$49.99 \pm 9.4e-02$	$50.40 \pm 1.7e-02$
		$\lambda = 0.50$	$\lambda = 0.40$	$\lambda = 0.45$
	ℓ_1 -SAR	$47.29 \pm 1.4e-01$	$49.68 \pm 7.8e-02$	$50.03 \pm 5.7e-02$
		$\lambda = 0.50$	$\lambda = 0.60$	$\lambda = 0.55$
g 	BBC	$24.55 \pm 9.4e-05$	$24.55 \pm 2.7e-05$	$24.55 \pm 5.3e-06$
	RSR	$26.76 \pm 9.8e-02$	$25.43 \pm 1.0e+00$	$26.33 \pm 1.2e+00$
	ZMT	$25.66 \pm 1.0e+00$	$24.72 \pm 2.2e-01$	$24.90 \pm 1.4e-01$
	SARREG	$45.58 \pm 1.4e-02$	$49.30 \pm 5.2e-02$	$51.16 \pm 3.5e-02$
	TV	$43.31 \pm 1.3e-01$	$46.99 \pm 1.6e-02$	$48.83 \pm 5.0e-02$
	ℓ_1	$44.14 \pm 5.1e-03$	$47.54 \pm 1.6e-02$	$49.26 \pm 7.7e-02$
	TV-SAR	$45.64 \pm 1.4e-02$	$49.32 \pm 5.9e-02$	$51.16 \pm 3.5e-02$
		$\lambda = 0.25$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.00$
	ℓ_1 -SAR	$45.80 \pm 2.2e-02$	$49.32 \pm 5.9e-02$	$51.18 \pm 1.1e-02$
		$\lambda = 0.45$	$\lambda = 0.05$	$\lambda = 0.05$
h 	BBC	$25.08 \pm 3.7e-04$	$25.08 \pm 1.2e-04$	$25.08 \pm 1.6e-06$
	RSR	$25.30 \pm 3.2e-01$	$25.67 \pm 3.1e-01$	$26.07 \pm 2.1e-01$
	ZMT	$25.21 \pm 9.7e-02$	$25.36 \pm 2.6e-01$	$25.30 \pm 5.1e-02$
	SARREG	$40.27 \pm 1.1e-02$	$46.08 \pm 8.4e-02$	$52.63 \pm 1.4e-01$
	TV	$41.92 \pm 1.2e-01$	$46.88 \pm 2.0e-01$	$52.76 \pm 4.6e-04$
	ℓ_1	$42.48 \pm 1.1e-01$	$47.47 \pm 2.1e-01$	$53.48 \pm 1.0e-01$
	TV-SAR	$42.07 \pm 9.5e-02$	$46.91 \pm 1.8e-01$	$53.11 \pm 1.2e-01$
		$\lambda = 0.85$	$\lambda = 0.95$	$\lambda = 0.55$
	ℓ_1 -SAR	$42.55 \pm 8.4e-02$	$47.48 \pm 1.9e-01$	$53.65 \pm 1.2e-01$
		$\lambda = 0.95$	$\lambda = 1.00$	$\lambda = 0.90$

de movimiento, el algoritmo de SR 5.1 con $c = \ell 1$ propuesto en Villena et al. (2010b) basado en la combinación de modelos a priori SAR y la norma $\ell 1$ y denotado como ($\ell 1$ -SAR) y por último el algoritmo de SR 5.2 con $c = TV$ basado en Villena et al. (2010a) denotado por (TV-SAR). Para las reconstrucciones de las imágenes de AR en el experimento con observaciones reales se ha aplicado el factor de magnificación $\sqrt{P} = 4$. Igual que en el experimento simulado, hemos aplicado la aproximación de Jacobi en la estimación de los hiperparámetros.

En las figura 5.19 se muestran las reconstrucciones de AR obtenidas, mediante los distintos métodos, a partir de las 20 primeras observaciones reales de la secuencia *text*. Fijándonos en los signo de admiración que aparecen en la imagen se puede apreciar cómo las reconstrucciones obtenidas mediante los algoritmos propuestos en esta memoria aparecen más nítidas que el resto de las reconstrucciones. En la figura 5.20 se muestra las imágenes de AR obtenidas a partir de las 20 observaciones reales de la secuencia *adyoron_rotation*. Igualmente, se puede observar cómo los ceros que aparecen en las cifras en vertical del centro de las imágenes han sido reconstruido mejor en las imágenes de AR obtenidas mediante los algoritmos de mezcla propuestos.

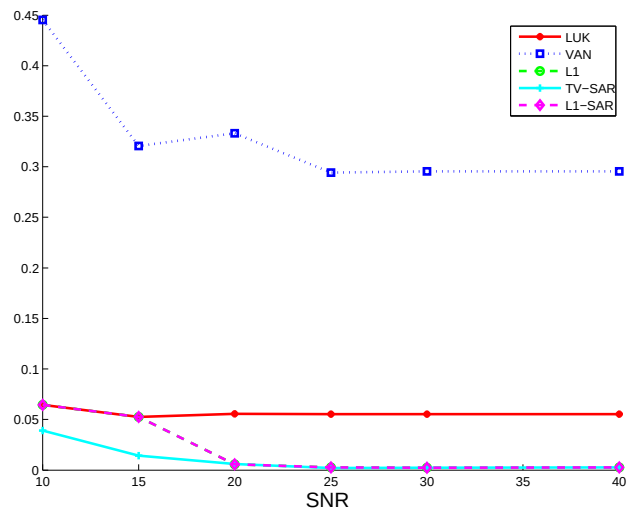
Por último en la figura 5.21 se muestran las 19 observaciones de BR obtenidas con una cámara Canon Ixus700 y en la figura 5.22 se muestran sus correspondientes reconstrucciones obtenidas con los distintos métodos aplicados. De nuevo podemos comprobar como las reconstrucciones obtenidas con los algoritmos de mezcla propuestos proporcionan mejores reconstrucciones que los otros métodos.

5.5. Conclusiones

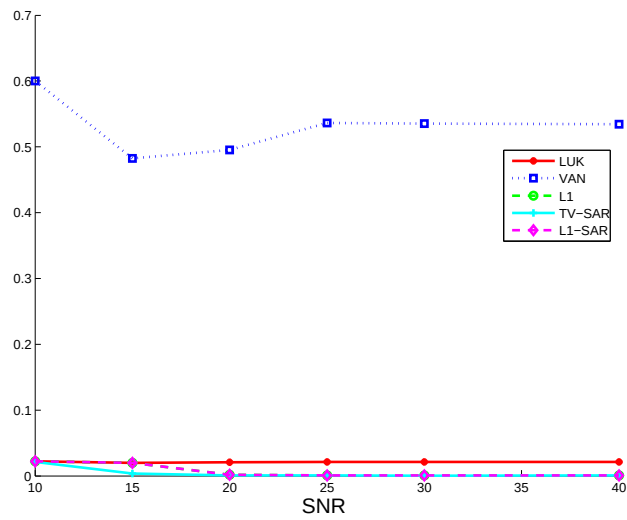
En este capítulo se ha estudiado la estimación conjunta de la imagen de AR y de los parámetros del movimiento aplicando los métodos de SR propuestos en los capítulos anteriores. El conjunto de los métodos propuestos para los distintos modelos a priori, y para las combinaciones de los mismos, se han resumido en los algoritmos 5.1 y 5.2.

La calidad de las imágenes de AR obtenidas mediante los métodos propuestos en esta memoria es, por lo general, mayor que las de las imágenes obtenidas aplicando el resto de métodos citados. La precisión del registrado mediante los métodos propuestos se ha comparado también favorablemente con la de los métodos de Vandewalle y de Lucas y Kanade.

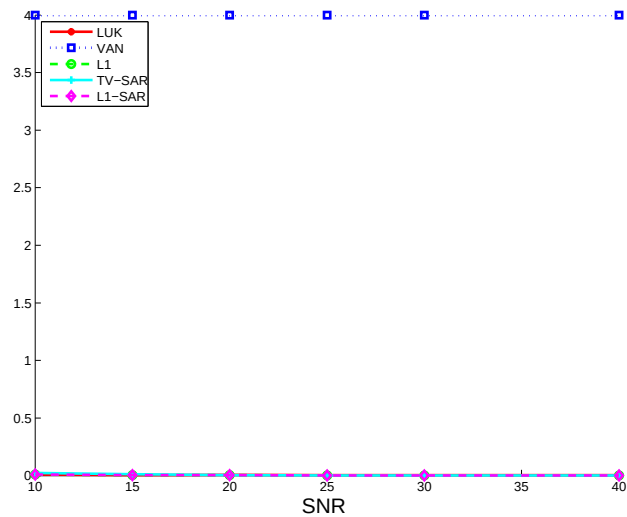
En los experimentos realizados sobre imágenes reales, los métodos propuestos dan también mejores resultados que el resto de los métodos.



(a)

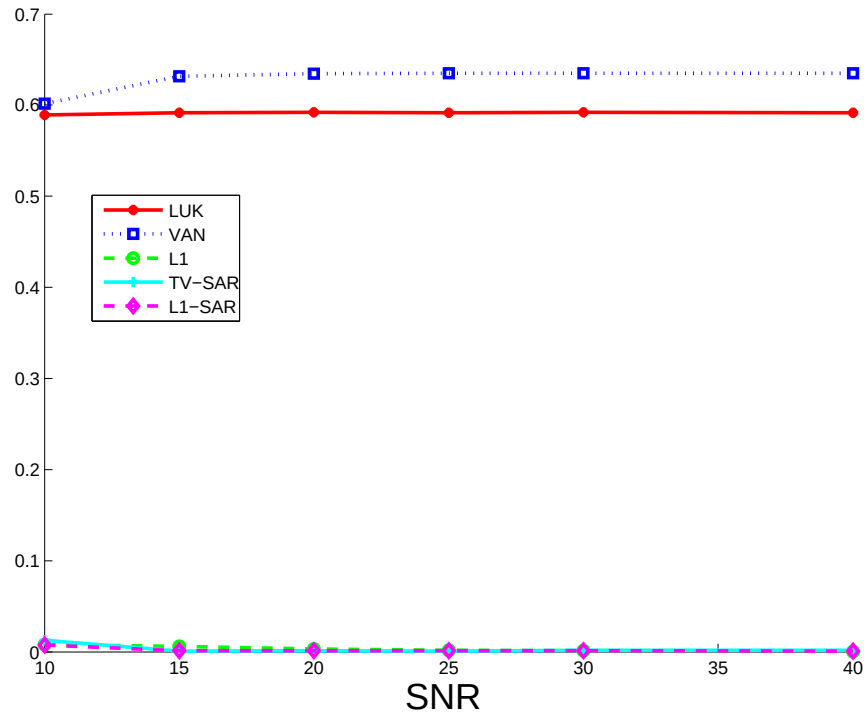


(b)

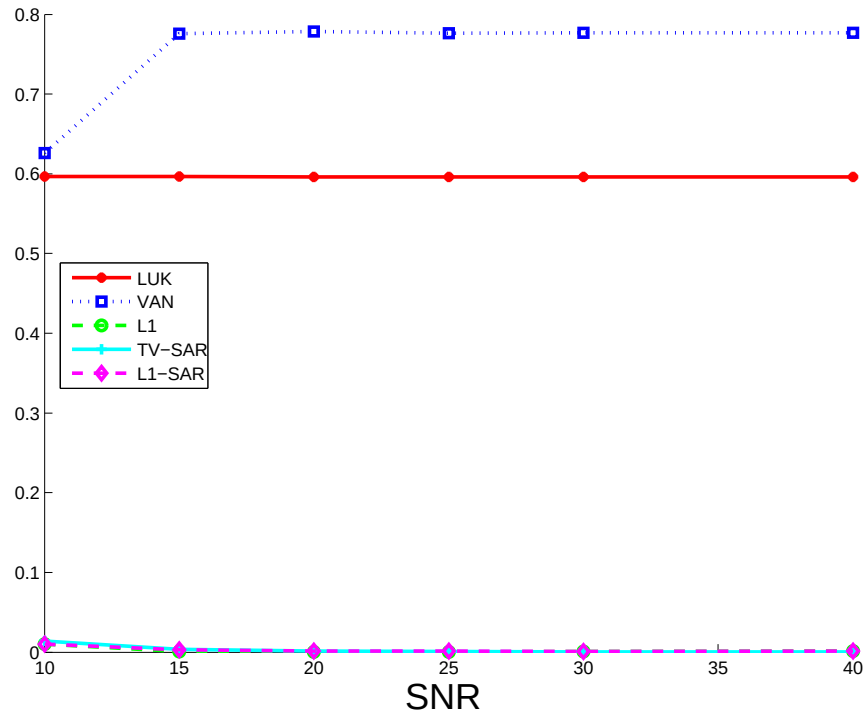


(c)

Figura 5.1: Media de los errores absolutos en el registro de la imagen mostrada en 3.2(h) para distintos niveles de ruido: (a) desplazamiento horizontal, (b) desplazamiento vertical y (c) ángulo de rotación.

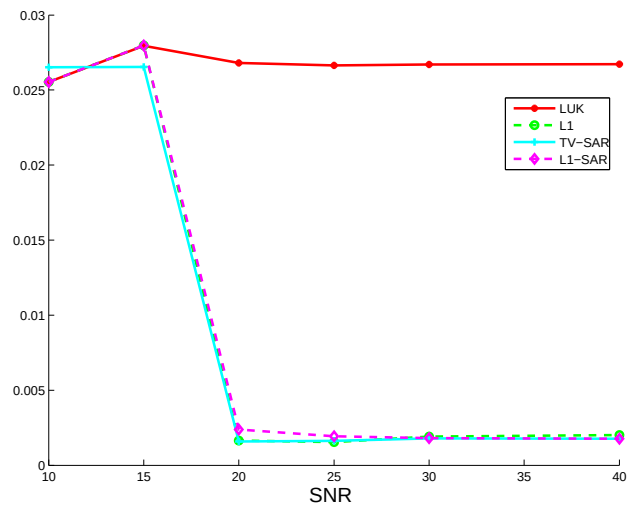


(a)

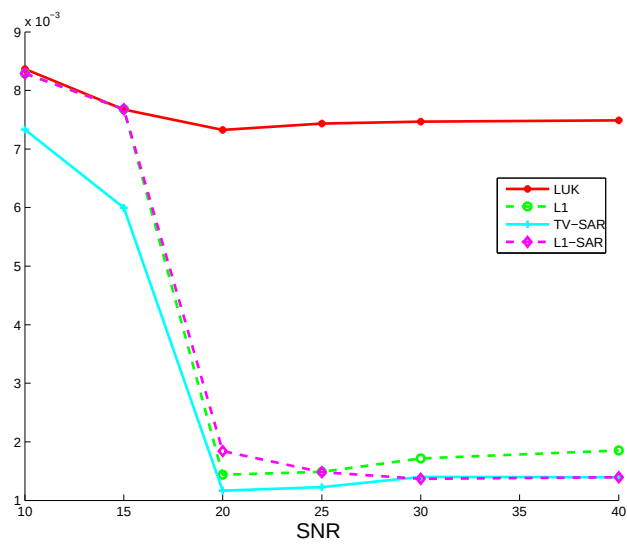


(b)

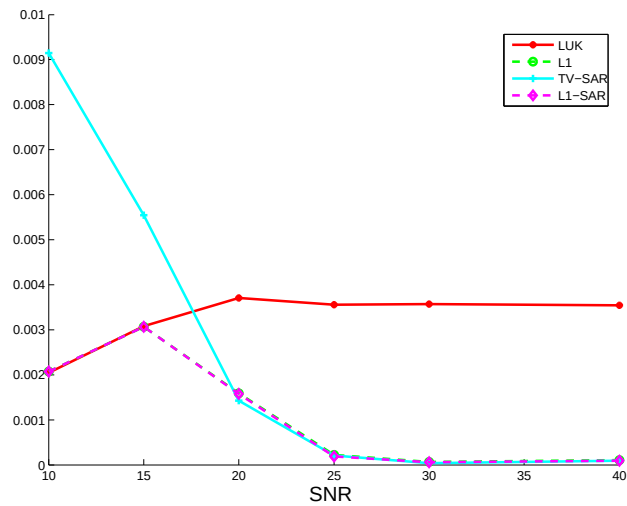
Figura 5.2: Media de los errores absolutos en el registro de la imagen mostrada en 3.2(b) para distintos niveles de ruido: (a) desplazamiento horizontal y (b) desplazamiento vertical.



(a)

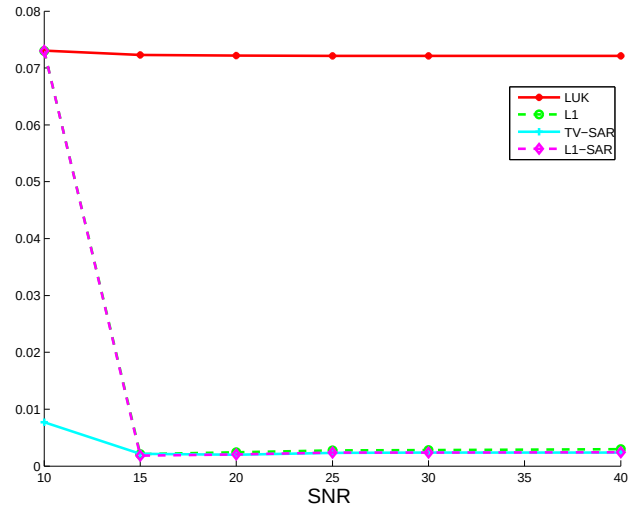


(b)

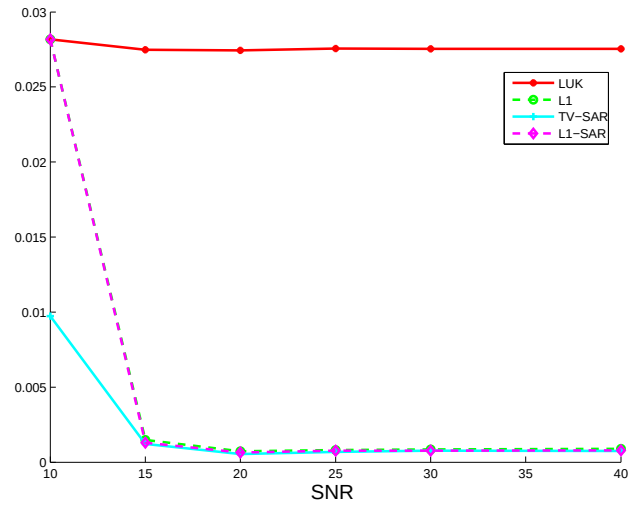


(c)

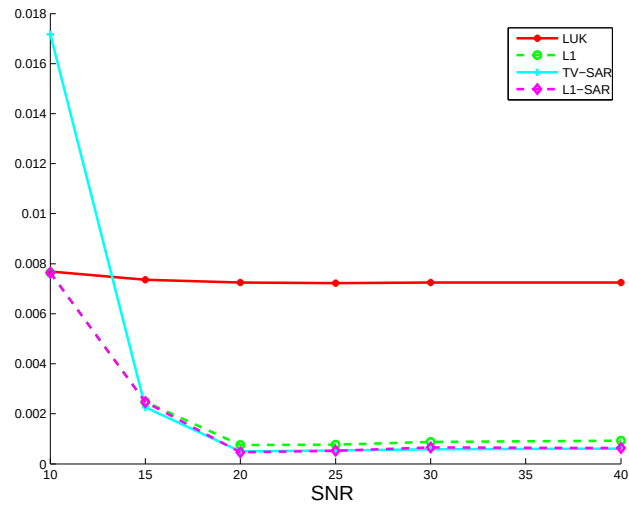
Figura 5.3: Media de los errores absolutos en el registro de la imagen mostrada en 3.2(c) para distintos niveles de ruido: (a) desplazamiento horizontal, (b) desplazamiento vertical y (c) ángulo de rotación.



(a)

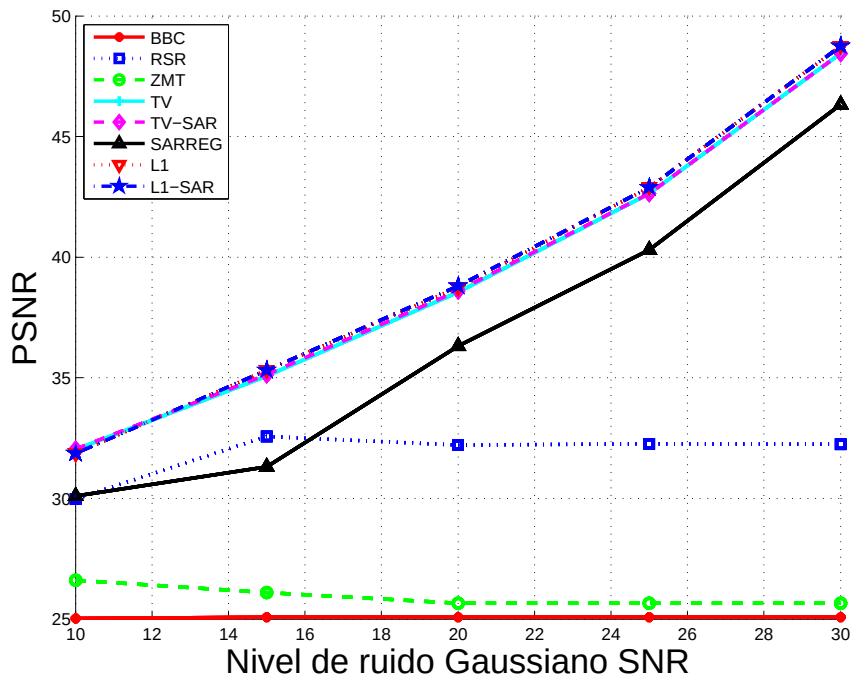


(b)

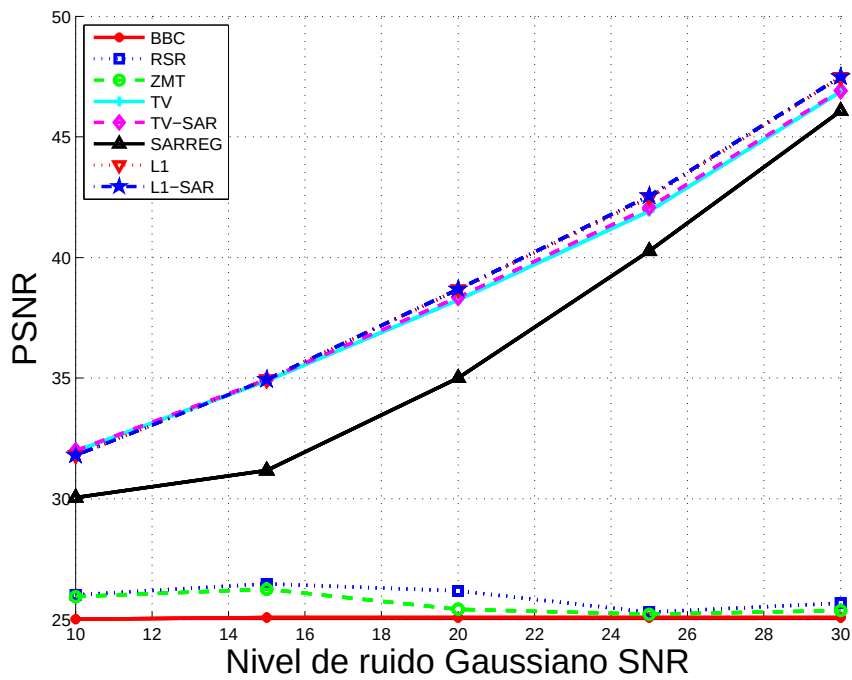


(c)

Figura 5.4: Media de los errores absolutos en el registro de la imagen mostrada en 3.2(f) para distintos niveles de ruido: (a) desplazamiento horizontal, (b) desplazamiento vertical y (c) ángulo de rotación.



(a)



(b)

Figura 5.5: Muestra la calidad de la imagen 3.2(h) reconstruida por los distintos métodos. (a) cuando es conocido el movimiento exacto y (b) cuando éste ha sido estimado.

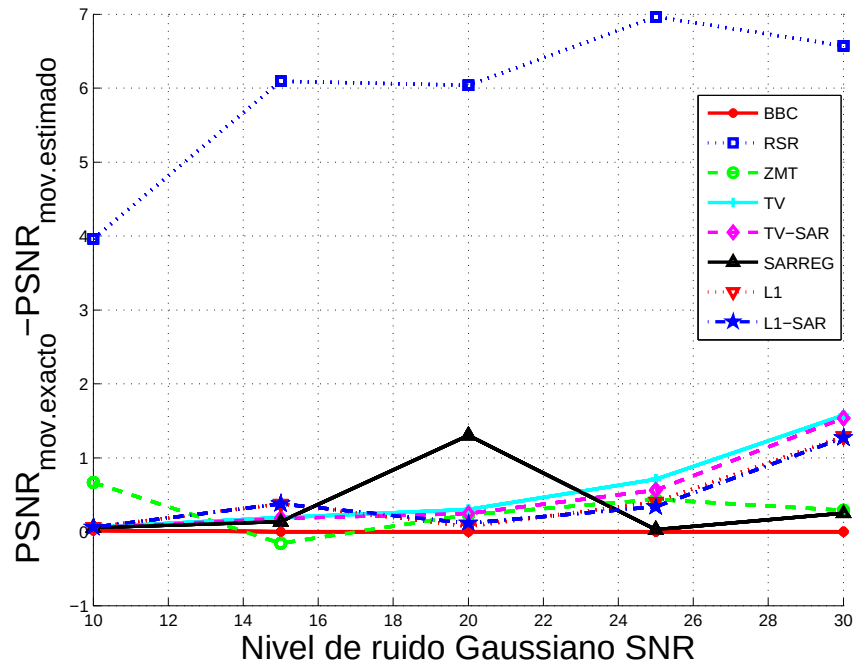


Figura 5.6: Muestra la diferencia entre los valores de PSNR de la figura 5.5(a) y los de la figura 5.5(b).

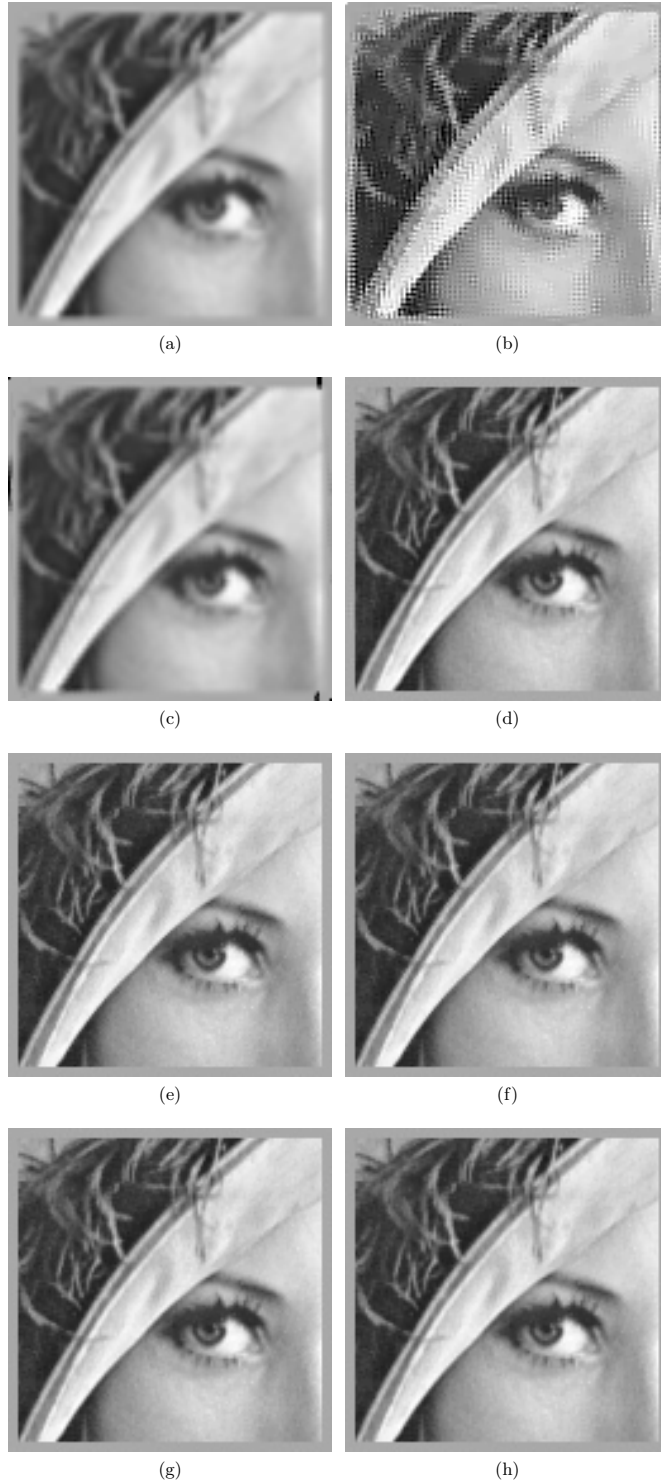


Figura 5.7: Reconstrucciones de la imagen 3.2(c) de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones a partir de las observaciones con nivel de ruido de 20db. (a) BBC con $PSNR = 24,74$, (b) RSR con $PSNR = 26,33$, (c) ZMT con $PSNR = 25,23$, (d) SARREG con $PSNR = 39,00$, (e) TV con $PSNR = 39,46$, (f) ℓ_1 con $PSNR = 39,52$, (g) TV-SAR con $\lambda_3 = 0,75$ y $PSNR = 40,54$ y (h) ℓ_1 -SAR con $\lambda_2 = 0,75$ y $PSNR = 40,59$.

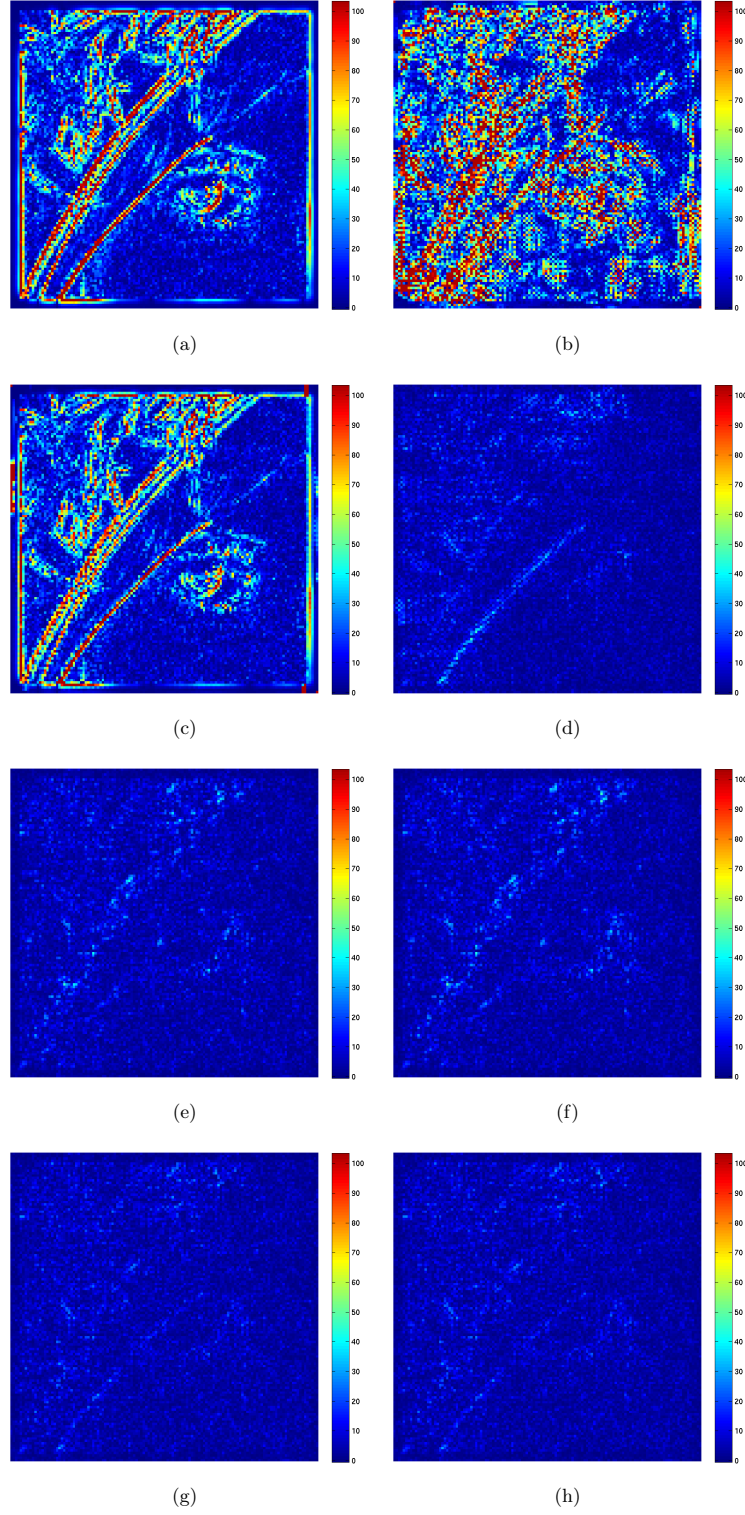
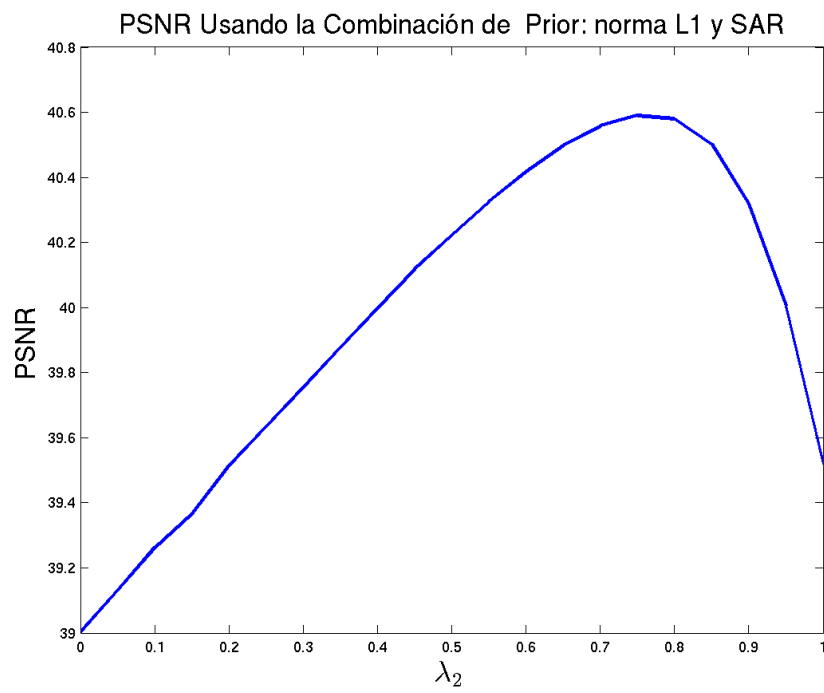
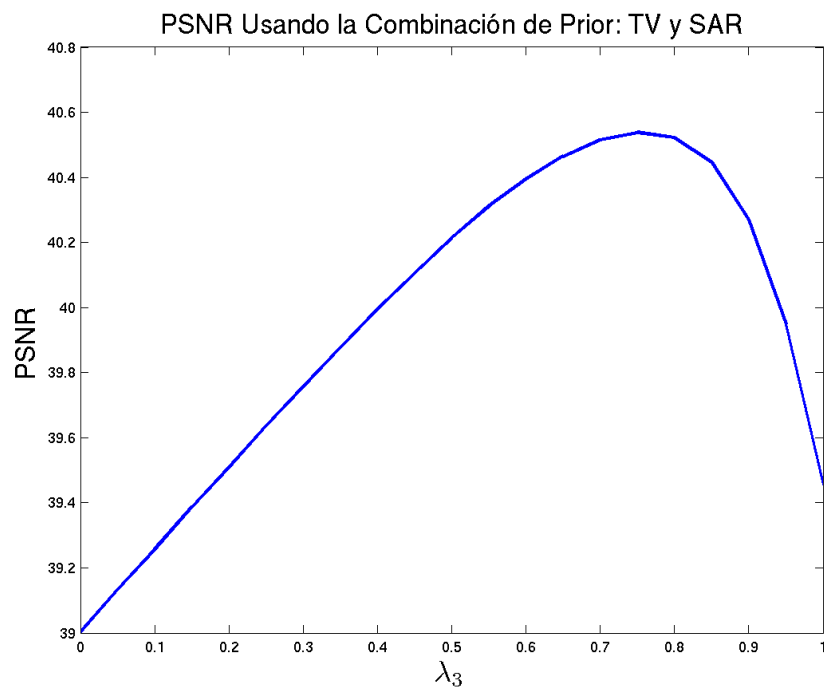


Figura 5.8: Muestra $|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{true}|$ para las imágenes de AR 3.2(c) estimadas $\hat{\mathbf{x}}$ en el experimento con 5 observaciones con nivel de ruido de $20db$ en las observaciones. (a) BBC, (b) RSR, (c) ZMT, (d) SARREG, (e) TV, (f) ℓ_1 , (g) TV-SAR y (h) ℓ_1 -SAR.

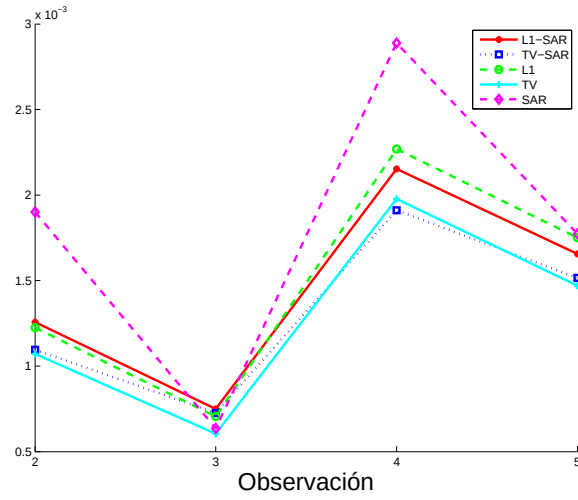


(a)

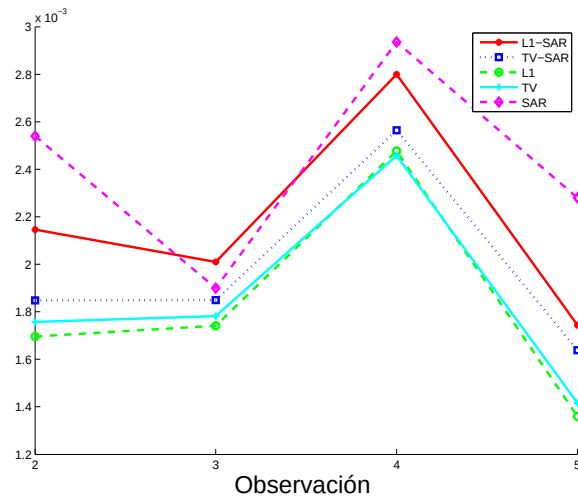


(b)

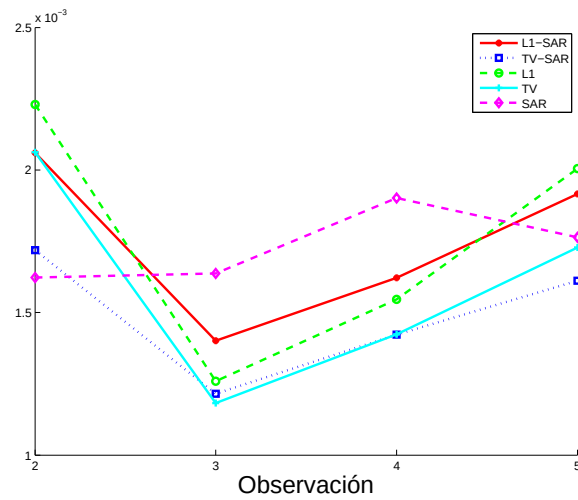
Figura 5.9: PSNR de las reconstrucciones en función de (a) λ_2 y (b) λ_3 en el experimento con 5 observaciones para la imagen 3.2(c) con 20db de ruido.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.10: Errores de registrado de las imágenes de una de las series generadas, en el experimento con 5 obsevaciones con 20 dB, para la imagen 3.2(c): (a) error del ángulo, (b) Error en desplazamiento horizontal y (c) error del desplazamiento vertical.

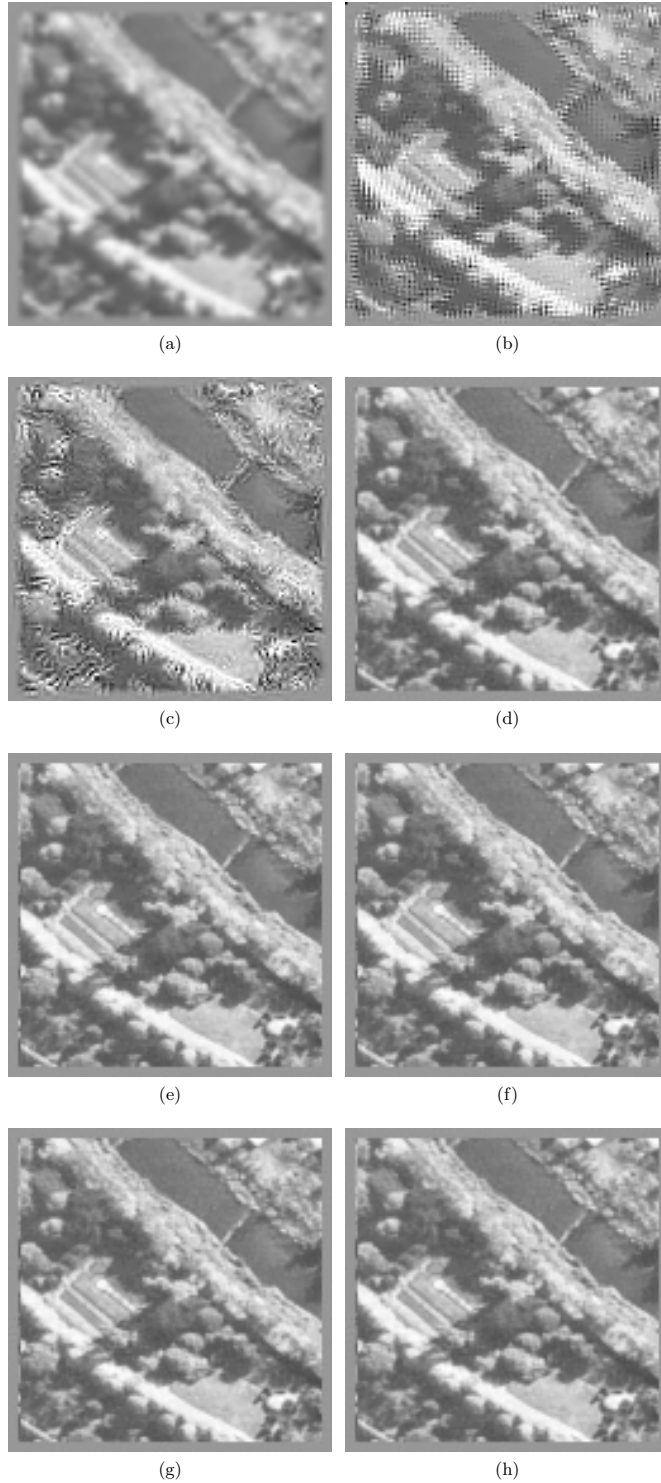


Figura 5.11: Reconstrucciones de la imagen 3.2(e) de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones a partir de las observaciones con nivel de ruido de 15db. (a) BBC con $PSNR = 25,33$, (b) RSR con $PSNR = 26,25$, (c) ZMT con $PSNR = 26,24$, (d) SARREG con $PSNR = 36,12$, (e) TV con $PSNR = 37,12$, (f) ℓ_1 con $PSNR = 36,77$, (g) TV-SAR con $\lambda_3 = 0,85$ y $PSNR = 37,37$ y (h) ℓ_1 -SAR con $\lambda_2 = 0,80$ y $PSNR = 37,28$.

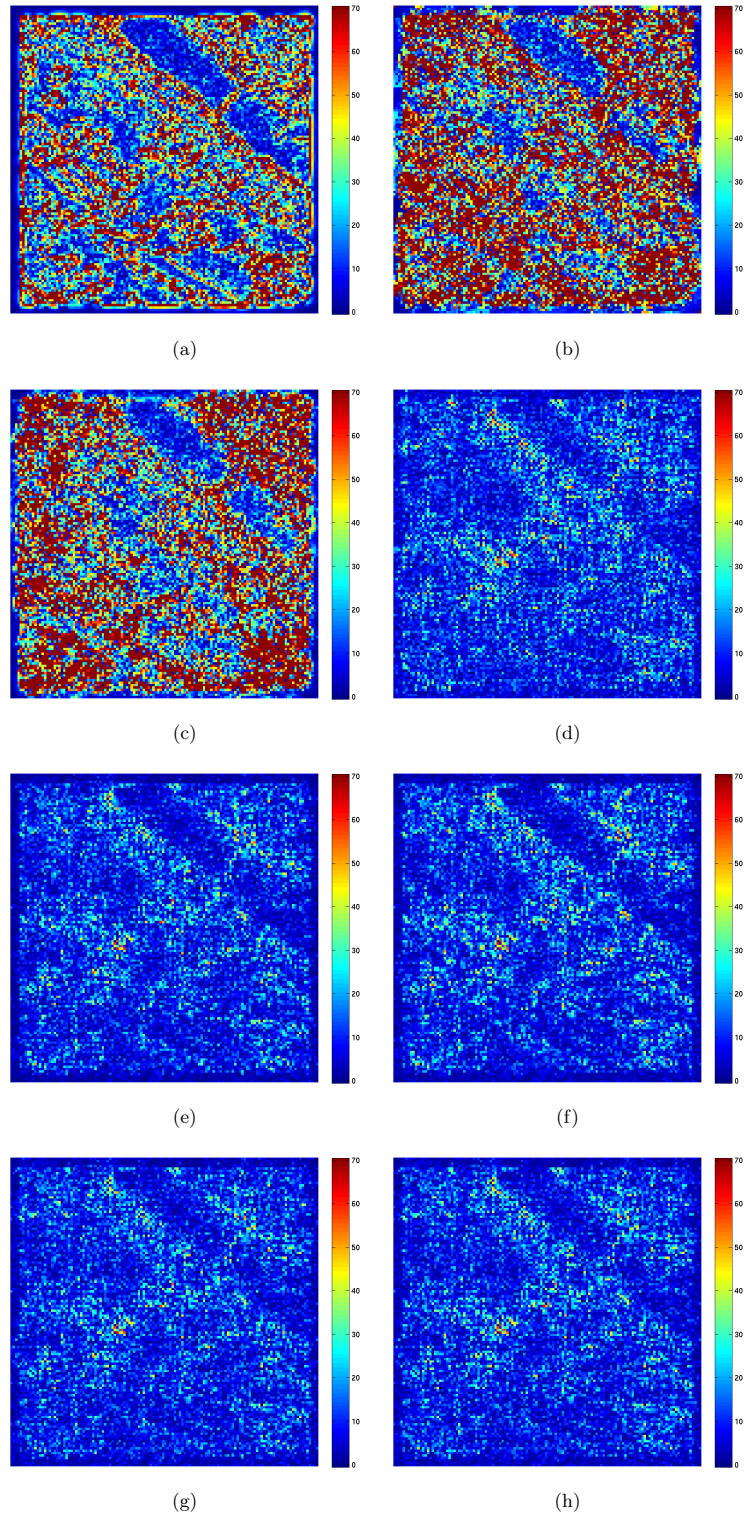
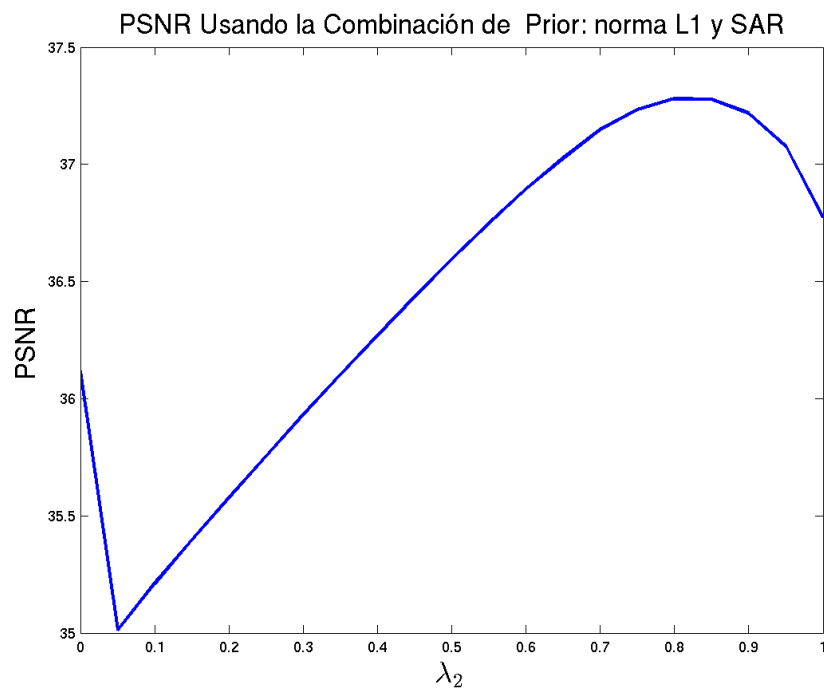
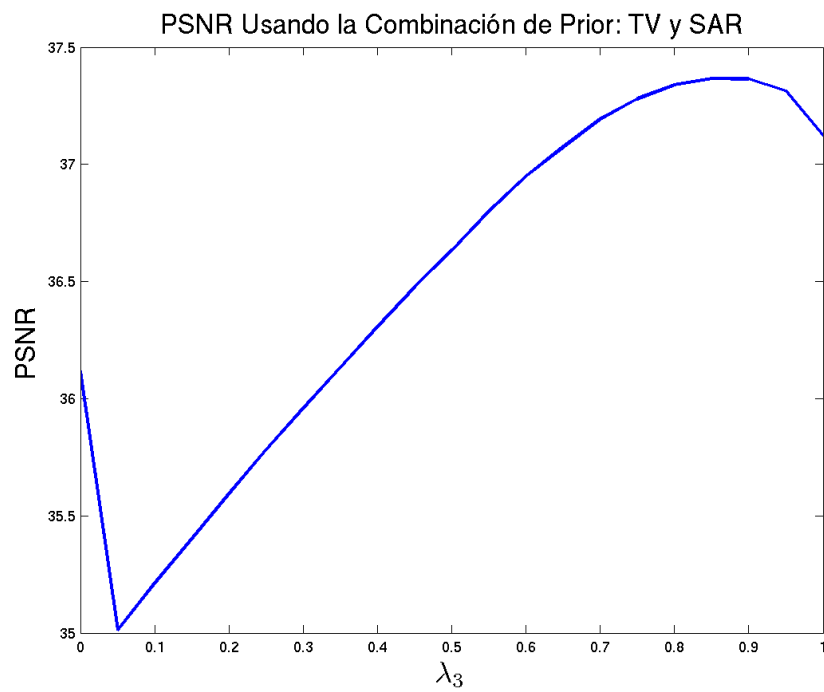


Figura 5.12: Muestra $|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{true}|$ para las imágenes de AR 3.2(e) estimadas $\hat{\mathbf{x}}$ en el experimento con 5 observaciones con nivel de ruido de $15db$ en las observaciones. (a) BBC, (b) RSR, (c) ZMT, (d) SARREG, (e) TV, (f) ℓ_1 , (g) TV-SAR y (h) ℓ_1 -SAR.

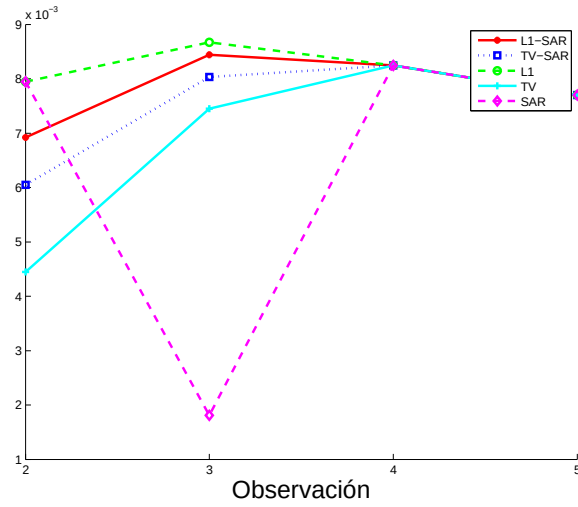


(a)

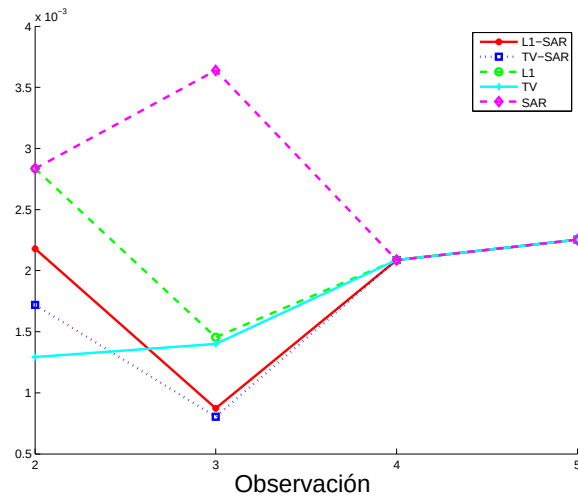


(b)

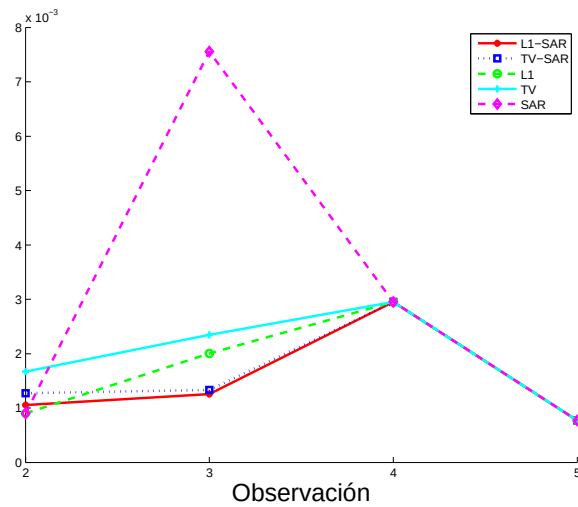
Figura 5.13: PSNR de las reconstrucciones en función de (a) λ_2 y (b) λ_3 en el experimento con 5 observaciones para la imagen 3.2(e) con 15db de ruido.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.14: Errores de registrado de las imágenes de una de las series generadas, en el experimento con 5 observaciones con 15 dB, para la imagen 3.2(e): (a) error del ángulo, (b) Error en desplazamiento horizontal y (c) error del desplazamiento vertical.

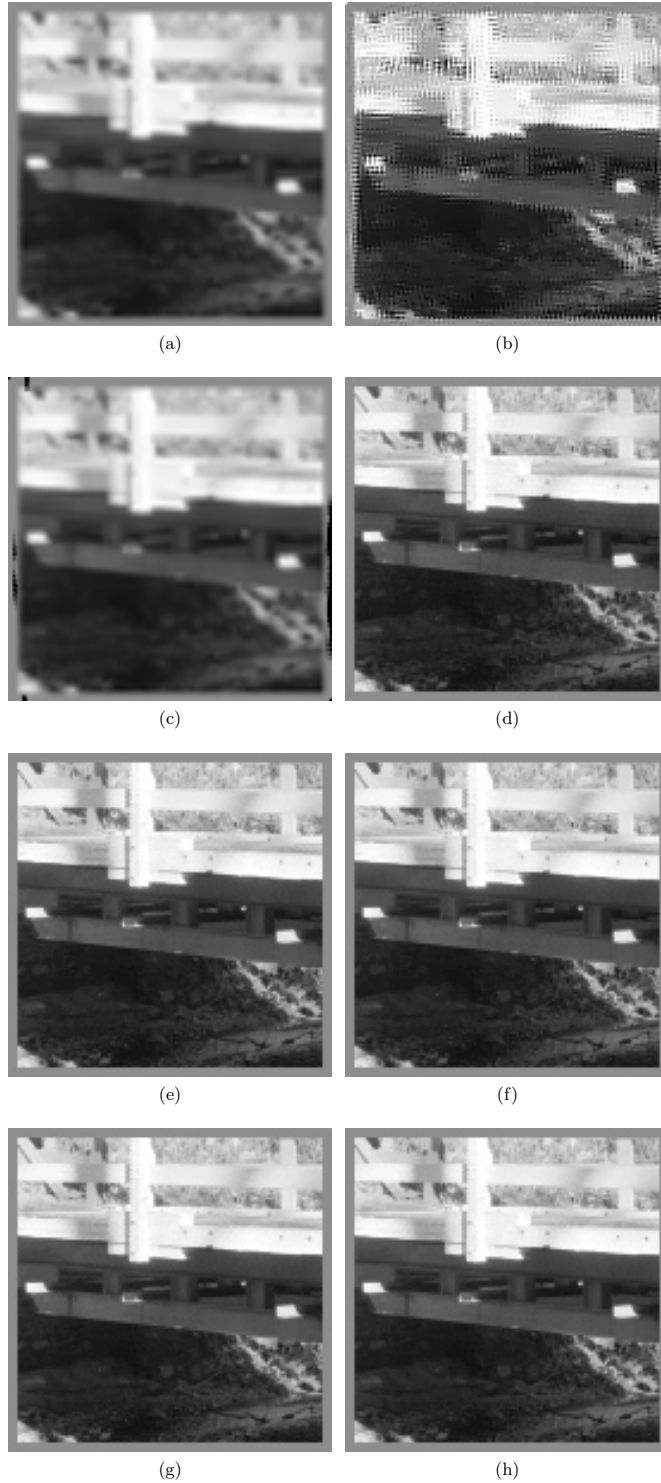


Figura 5.15: Reconstrucciones de la imagen 3.2(h) de AR obtenidas en el experimento con 5 observaciones a partir de las observaciones con nivel de ruido de 25db. (a) BBC con $PSNR = 25,08$, (b) RSR con $PSNR = 24,92$, (c) ZMT con $PSNR = 25,08$, (d) SARREG con $PSNR = 40,27$, (e) TV con $PSNR = 41,92$, (f) ℓ_1 con $PSNR = 42,49$, (g) TV-SAR con $\lambda_3 = 0,85$ y $PSNR = 42,05$ y (h) ℓ_1 -SAR con $\lambda_2 = 0,95$ y $PSNR = 42,54$.

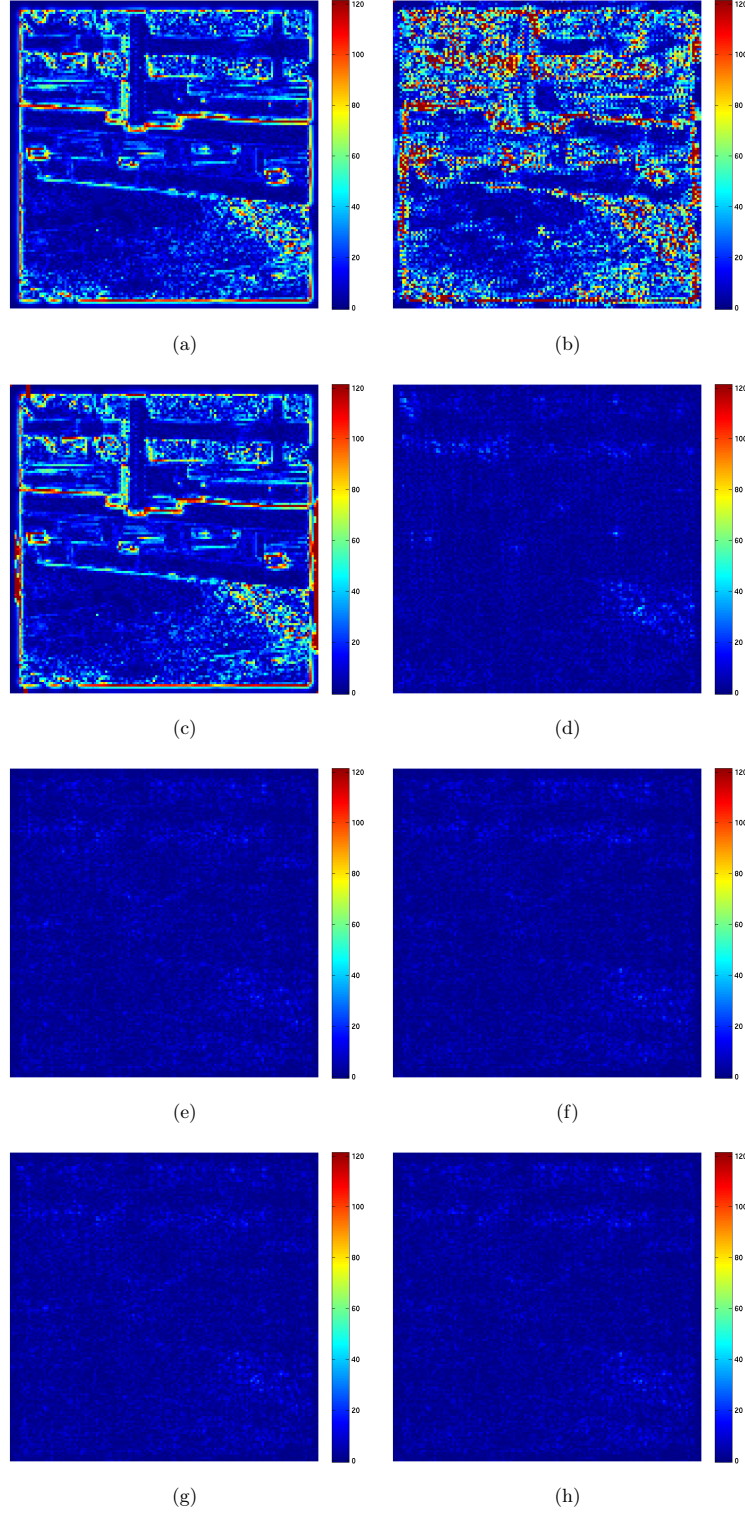
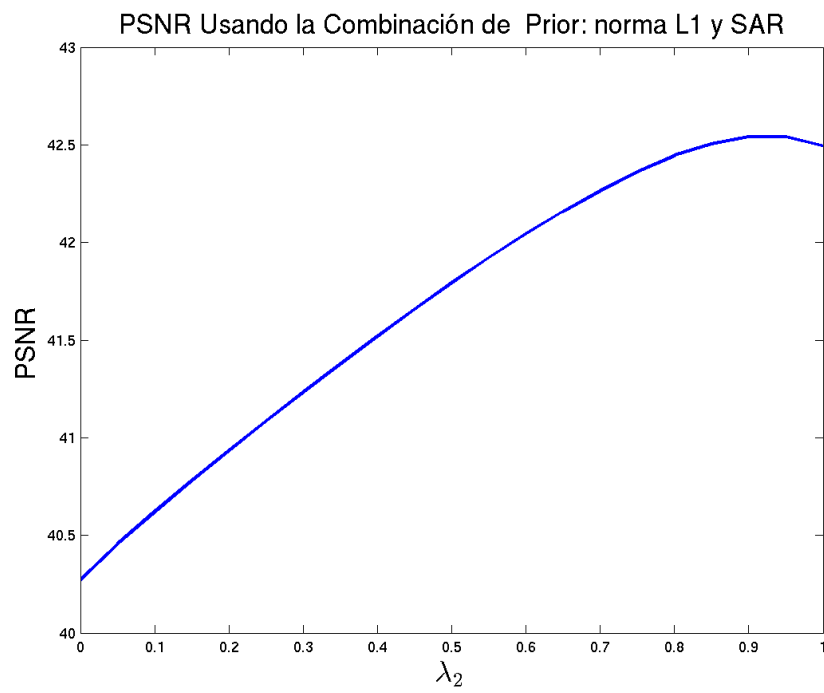
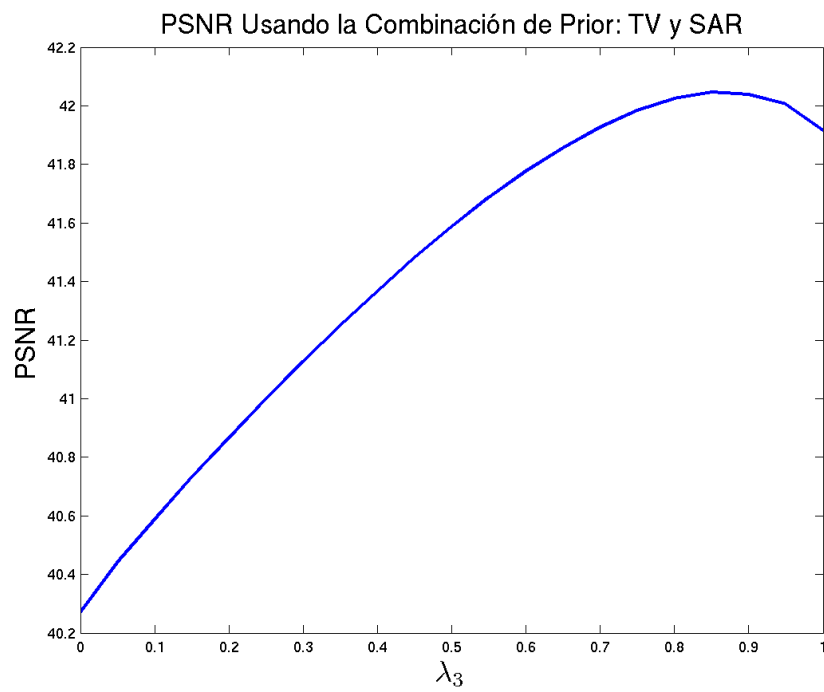


Figura 5.16: Muestra $|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{true}|$ para las imágenes de AR 3.2(h) estimadas $\hat{\mathbf{x}}$ en el experimento con 5 observaciones con nivel de ruido de $25db$ en las observaciones. (a) BBC, (b) RSR, (c) ZMT, (d) SARREG, (e) TV, (f) ℓ_1 , (g) TV-SAR y (h) ℓ_1 -SAR.

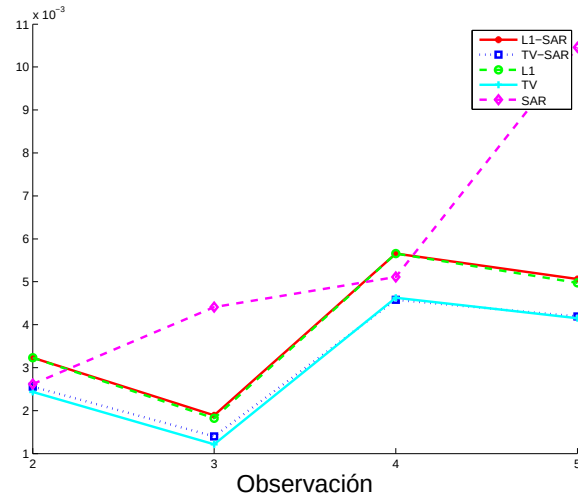


(a)

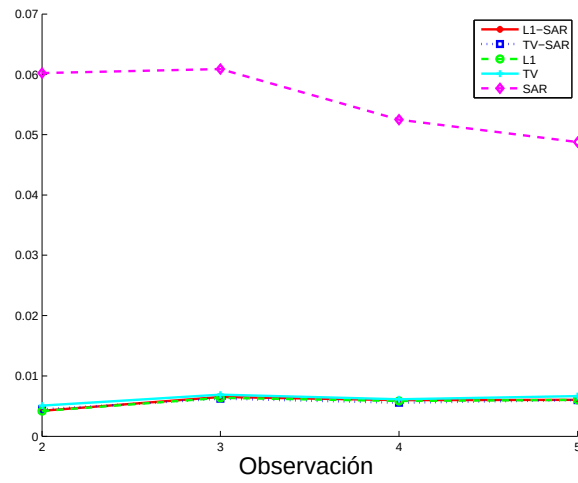


(b)

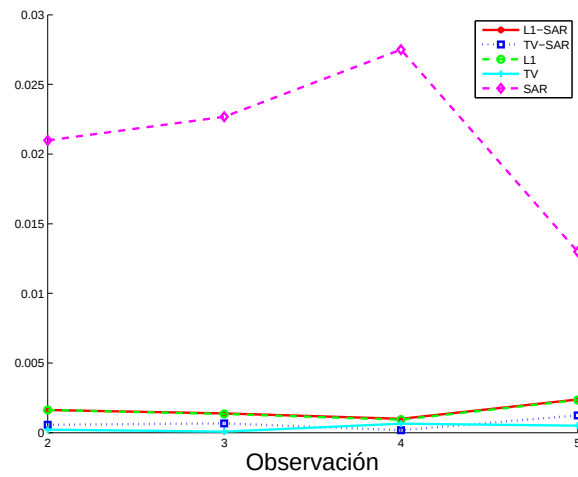
Figura 5.17: PSNR de las reconstrucciones en función de (a) λ_2 y (b) λ_3 en el experimento con 5 observaciones para la imagen 3.2(h) con 25db de ruido.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.18: Errores de registrado de las imágenes de una de las series generadas, en el experimento con 5 obsevoaciones con 25 dB, para la imagen 3.2(h): (a) error del ángulo, (b) Error en desplazamiento horizontal y (c) error del desplazamiento vertical.



Figura 5.19: Reconstrucciones de imágenes de AR obtenidas en el experimento (B) a partir de 20 imágenes reales de la secuencia *text* con los métodos: (a) BBC, (b) RSR, (c) ZMT, (d) ℓ_1 , (e) TV-SAR con $\lambda_3 = 0,6$ y (f) ℓ_1 -SAR con $\lambda_2 = 0,6$.

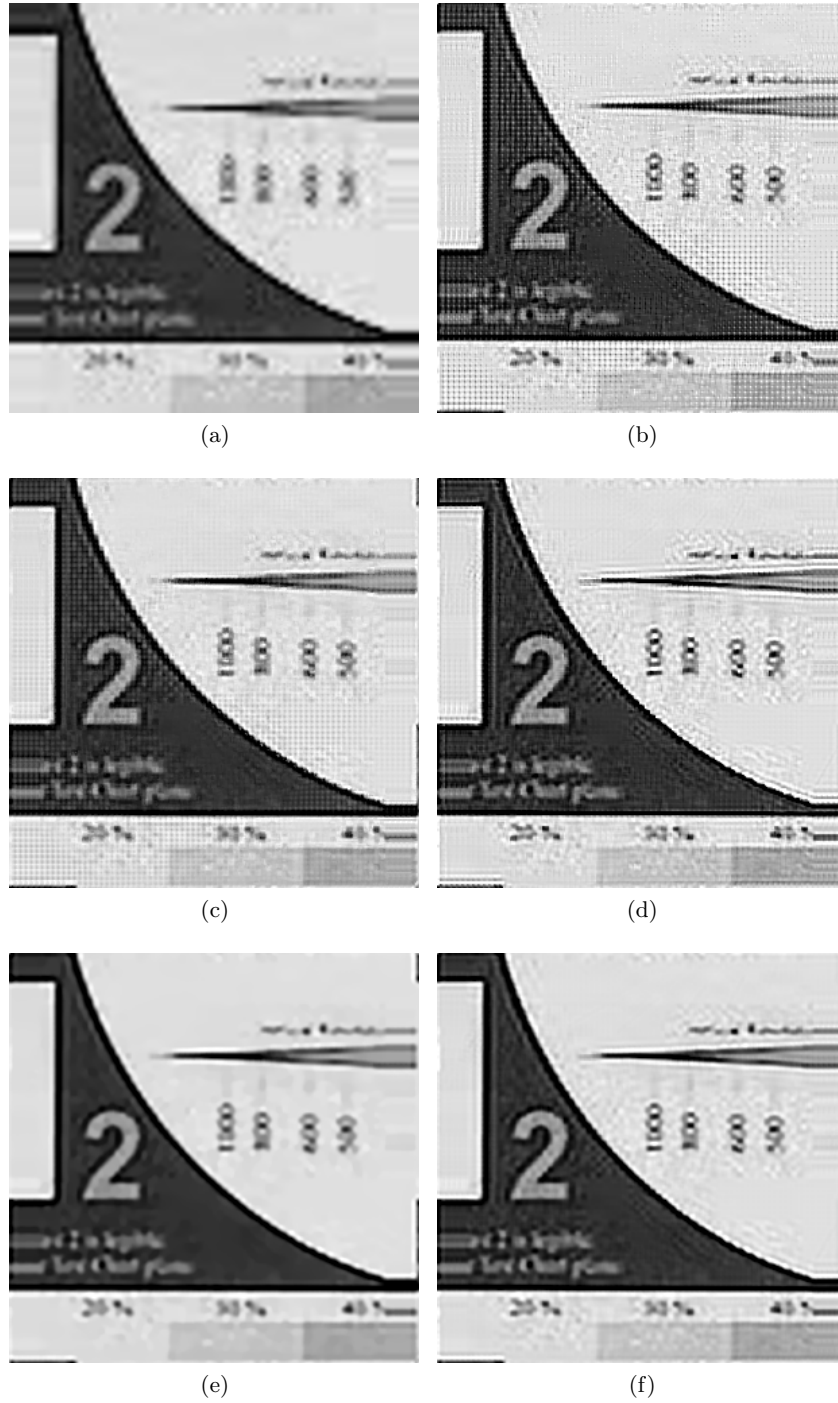


Figura 5.20: Reconstrucciones de imágenes de AR obtenidas en el experimento (B) a partir de 20 imágenes reales de la secuencia *adyoron_rotation* con los métodos: (a) BBC, (b) RSR, (c) ZMT, (d) ℓ_1 , (e) TV-SAR con $\lambda_3 = 0,6$ y (f) ℓ_1 -SAR con $\lambda_2 = 0,8$.



Figura 5.21: Muestra la secuencia de 19 observaciones de BR obtenidas con una cámara Canon Ixus700.



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5.22: Reconstrucciones de imágenes de AR obtenidas a partir de 19 observaciones reales capturadas con una cámara Canon Ixus700 (ver figura 5.21) y usando los métodos: (a) BBC, (b) RSR, (c) ZMT, (d) ℓ_1 , (e) TV-SAR con $\lambda_3 = 0,5$ y (f) ℓ_1 -SAR con $\lambda_2 = 0,5$.

Capítulo 6

Conclusiones y Trabajos Futuros

6.1. Conclusiones

En esta memoria hemos presentado diversas aportaciones dentro de la modelización e inferencia Bayesiana del problema de la SR. Se ha prestado especial atención a los modelos a priori, que, como hemos podido comprobar, tienen una capital influencia en la calidad de las imágenes obtenidas. El problema se aborda con el enfoque variacional, que al trabajar con las distribuciones de los parámetros, a diferencia del análisis de la evidencia o empírico que lo hace con sus valores puntuales, es más robusto, y permite abordar el estudio de modelos a priori más complejos.

En el capítulo 3 se ha presentado un método de SR Bayesiano variacional que usa un modelo a priori basado en la norma ℓ_1 de los gradientes horizontal y vertical. El estudio experimental revela que este método permite obtener imágenes de mayor calidad que los métodos Bayesianos basados en el modelo a priori TV (recientemente aplicado a SR en Babacan et al. (2011)) o el modelo a priori SAR, ampliamente utilizado anteriormente.

Obviamente, cuál sea el modelo más adecuado para cada imagen, va a depender de sus características concretas. En este sentido y con el objeto de cubrir las diversas características que pueden confluir en cada zona de la imagen de AR, en el capítulo 4 se han propuesto métodos Bayesianos de SR, basados en la combinación de diversas distribuciones a posteriori definidas sobre distintos modelos a priori. En concreto, se proponen dos métodos: uno que combina los modelos a priori SAR y el basado en la norma ℓ_1 de los gradientes horizontal y vertical, y otro que combina los modelos a priori SAR y TV. Ambos métodos se han comparado favorablemente con los métodos que usan un solo modelo a priori.

El método de estimación del movimiento junto con la imagen de AR, propuesto en el capítulo 5, ha resultado un método muy preciso de registrado

en AR a partir de imágenes de BR. Los resultados obtenidos han sido más exactos que los de los métodos de registrado utilizados habitualmente como paso previo a los métodos de SR de imágenes reales.

Para estimar los hiperparámetros de los modelos de SR propuestos en los capítulos 3, 4 y 5, es necesario aproximar las matrices de covarianza. Para ello, en el apéndice A, se ha propuesto un preconditionamiento circulante que permite aproximar, la mencionada matriz de covarianza en el dominio de Fourier. Esta aproximación circulante se comporta mejor que otras aproximaciones convencionales como la aproximación FSAI, Kolotilina y Yeremin (1993), la de Jacobi o la de Lanczos, Lanczos (1950), Lanczos (1952).

En resumen, en esta memoria se aportan nuevos métodos de SR Bayesianos variacionales que utilizan un nuevo modelo a priori basado en la norma ℓ_1 de los gradientes horizontal y vertical, y también combinaciones de modelos, tales como la combinación de modelos a priori SAR y el basado en la norma ℓ_1 y la combinación de los modelos SAR y TV.

6.2. Trabajos Futuros

Las aportaciones de esta tesis permite abordar nuevos problemas mediante combinaciones de diferentes modelos a priori, que puedan adaptarse a las características particulares de las distintas aplicaciones.

El siguiente reto que se nos plantea es la estimación de los coeficientes de mezcla $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$. Ya hemos comenzado a trabajar en ese problema

Por otro lado, los métodos propuestos pueden aplicarse al procesamiento de señales de muy diversos tipos, como por ejemplo: a imágenes multi-modales, a imágenes multi-espectrales, a imágenes médicas, o a imágenes de radar de apertura sintética (Synthetic aperture radar), etc., siendo estos los campos donde pretendemos aplicar los métodos desarrollados en esta memoria.

Apéndice A

Métodos de Inversión Aproximada de Matrices

A.1. Introducción

En los distintos métodos de SR propuestos en esta memoria (ver los capítulos 3, 4 y 5) la imagen de AR se obtendrá resolviendo una ecuación lineal del tipo

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (\text{A.1})$$

y los valores de los parámetros, mediante expresiones en las que aparecerán trazas como

$$\text{traza}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}), \quad (\text{A.2})$$

donde $\mathbf{A} = \text{cov}[\mathbf{x}]^{-1}$ representa la inversa de la matriz de covarianza de la distribución a posteriori de $\mathbf{x}$, que será simétrica definida positiva.

La forma explícita de la inversa de la matriz de covarianza $\text{cov}[\mathbf{x}]^{-1}$ cambiará de unos modelos a otros, pero en la mayoría de los casos no es posible obtener $\text{cov}[\mathbf{x}]$, por su gran tamaño. Esta matriz tendrá un tamaño $PN \times PN$, donde $P > 1$ representa el factor de magnificación respecto a la resolución de las observaciones, y N el número de píxeles de las imágenes de BR. Para hacernos una idea de la magnitud del problema supongamos que queremos aplicar un método Bayesiano de SR para obtener una imagen AR de $PN = 250 \times 250$ píxeles. En este caso, la matriz resultante tendría $3,9 \times 10^9$ elementos y ocuparían 15,6 GBs si sus elementos fuesen reales de simple precisión.

Cuando existe invarianza bajo traslaciones, como sucede en el problema de SR formulado en Molina et al. (2003a) y Cortijo et al. (2003), es posible abordar el problema de la SR en el dominio de la frecuencia y la matriz de covarianza se obtiene fácilmente, por ser diagonal en ese dominio. Sin

embargo, en el dominio espacial debe descartarse la obtención directa de la matriz de covarianza, por la elevada complejidad espacial y temporal que su cálculo presenta.

Por fortuna, las inversas de la matrices de covarianza resultantes en los métodos de SR suelen ser ralas (sparse), esto es, con un gran número de ceros. Esto facilita su manipulación, porque sólo es necesario guardar los elementos distintos de cero. Sin embargo, el que una matriz sea rala, no garantiza que su inversa también lo sea.

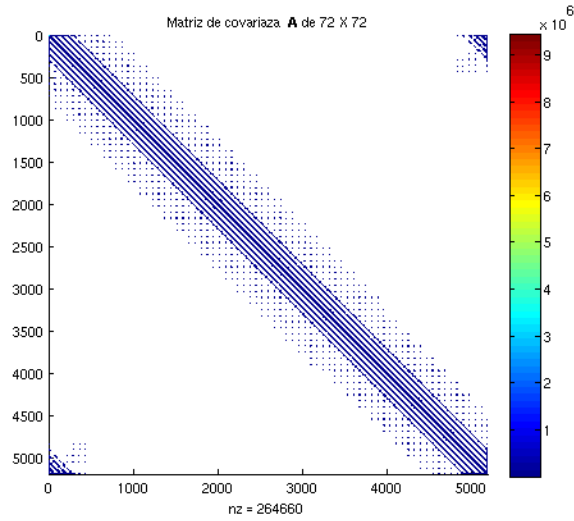
Por lo general, los métodos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales permiten obtener la solución de la Ec. (A.1) sin necesidad de invertir la matriz del sistema $\mathbf{A}$ (véase por ejemplo, Benzi (2002), Saad (2003) y Chen (2005)). Esto bastaría en el caso que los parámetros sean conocidos o ajustados experimentalmente, como por ejemplo en los métodos de SR propuestos en Schultz y Stevenson (1992), Schultz y Stevenson (1994) y Hardie et al. (1997).

Sin embargo, si se opta por un ajuste automático de los parámetros del modelo mediante la estimación Bayesiana conjunta de la imagen de AR y de los parámetros del modelo, ya sea aplicando el análisis de la evidencia, o una aproximación variacional, como en nuestro caso, ya no basta con resolver la Ec. (A.1), sino que necesitamos una aproximación para la inversa de la matriz del sistema $\mathbf{A}$, que nos permita evaluar trazas del tipo de la que aparece en la Ec. (A.2). Necesitamos pues, métodos aproximados de inversión de matrices ralas cuya complejidad espacial y temporal sea tratable. Esta misma necesidad se ha planteado en otros trabajos de SR, como en Nguyen et al. (1999), Fransens et al. (2007), Babacan et al. (2008a), y en Villena et al. (2009a), Villena et al. (2010a), Villena et al. (2010c) y Villena et al. (2010b).

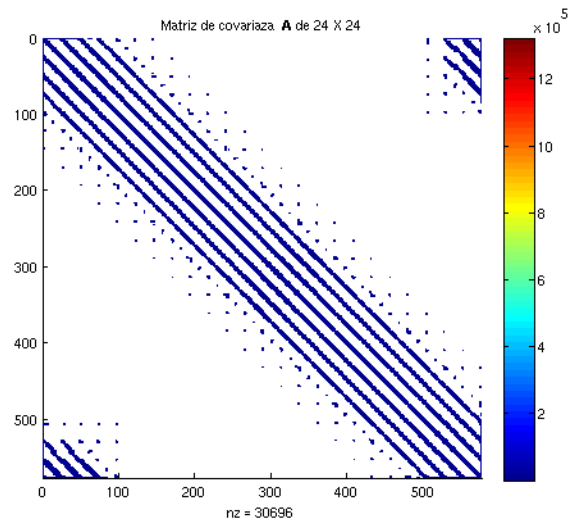
En Chantas et al. (October 2008) se propone aplicar el algoritmo de Lanczos (basado en proyecciones sobre subespacios de Krylov, ver Barrett et al. (1994) y Saad (2003)) al problema de restauración de imágenes. Este algoritmo permite resolver iterativamente la Ec. (A.1), y el cálculo de la traza en la Ec. (A.2), sin necesidad de obtener explícitamente la matriz inversa de $\mathbf{A}$. Pero en nuestros experimentos de SR, hemos podido observar que el mencionado algoritmo converge peor que el del gradiente conjugado, y produce peores resultados para la imagen de AR $\mathbf{x}$.

Recientemente, en Zhang et al. (2010), se propone la utilización de patrones de matrices ralas que permiten aumentar el grado de paralelización del proceso de inversión de las citadas matrices. En este trabajo hemos estudiado las características de las matrices inversas de covarianza, para distintas imágenes, para los distintos modelos propuestos en los Capítulos 3, 4 y 5, y para distintos ángulos de giro, buscando patrones comunes. Hemos observado que los patrones de las matrices de covarianza inversa cambian con el ángulo de rotación. En cualquier caso, no parece fácil ajustar las matrices resultantes

a los patrones de matrices ralas propuestas en Zhang et al. (2010).

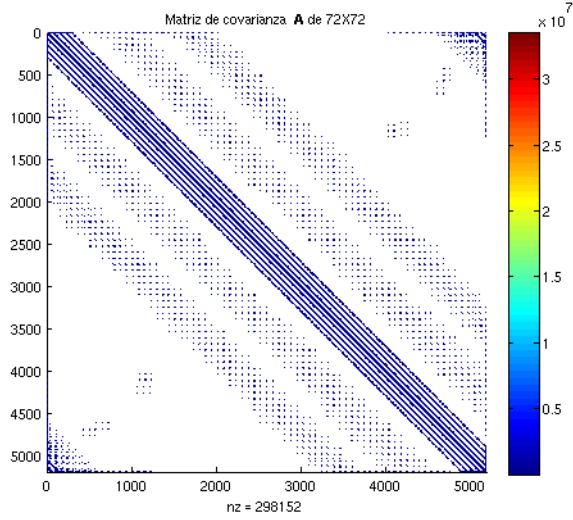


(a)

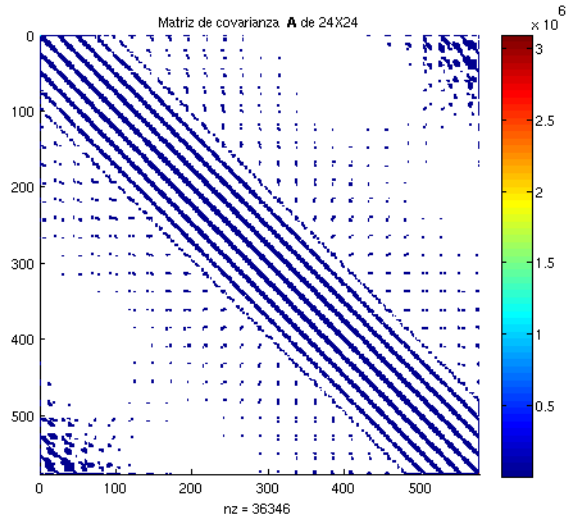


(b)

Figura A.1: Patrones de la matriz $\text{cov}[\mathbf{x}]^{-1}$ para las imágenes de la Figura A.3, en el método de SR del capítulo 3, aplicado a conjuntos de cinco observaciones de BR con un factor de escala $\sqrt{P} = 2$, donde (a) corresponde a la imagen de la Figura A.3(a) y (b) a la de la Figura A.3(b) para ángulos de giro en el intervalo $[-5^\circ, 5^\circ]$.



(a)



(b)

Figura A.2: Patrones de la matriz $\text{cov}[\mathbf{x}]^{-1}$ para las imágenes de la Figura A.3, en el método de SR del capítulo 3, aplicado a conjuntos de cinco observaciones de BR con un factor de escala $\sqrt{P} = 2$, donde (a) corresponde a la imagen de la Figura (a) corresponde a la imagen de la Figura A.3(a) y (b) a la Figura A.3(b) para ángulos de giro en el intervalo $[-20^\circ, 20^\circ]$.

A título ilustrativo, en la figura A.1 representamos los patrones de alguna de las inversas de las matrices de covarianza. Para ello hemos tomado las imágenes de la figura A.3, y generado series de 5 observaciones simuladas de BR para un factor de magnificación $\sqrt{P} = 2$ y con ángulos de rotación

comprendidos en el intervalo $[-5^\circ, 5^\circ]$ y también en el $[-20^\circ, 20^\circ]$. Hemos considerado el modelo descrito en los Capítulos 4 y 5, de una combinación entre el modelo a priori basado en la norma ℓ_1 de los gradientes horizontal y vertical, con un peso $\lambda = 0,85$, y el modelo SAR. La figura A.1 muestra los patrones de las matrices inversas de covarianza resultantes, en una iteración escogida al azar. En concreto, la figura A.1(a) corresponde a la imagen de la figura A.3(a), y la figura A.1(b) a la imagen de la figura A.3(b), ambas para el intervalo de ángulos $[-5^\circ, 5^\circ]$; las figuras A.2(a) y (b) corresponden al intervalo de ángulos $[-20^\circ, 20^\circ]$.

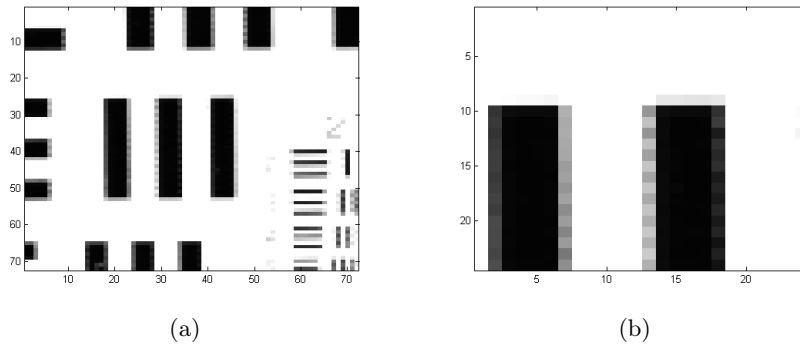


Figura A.3: Imágenes de AR utilizadas para la generación de la matriz de covarianza. (a) imagen de 72×72 y (b) imagen de 24×24 .

A.2. Técnicas de Inversión Aproximada de Matrices Ralas

En esta sección estudiaremos los métodos aproximados de inversión de matrices analizados en Villena et al. (2009b). En concreto, estudiaremos los métodos de Jacobi, Factorized Sparse Approximate Inverse (FSAI) y aproximación circulante.

A.2.1. Método de Jacobi

El método de Jacobi aproxima la matriz de covarianza por la inversa de la diagonal de la matriz $\text{cov}[\mathbf{x}]^{-1}$. Esta aproximación es simple, rápida y eficaz en el caso en que la matriz $\text{cov}[\mathbf{x}]^{-1}$ sean predominantemente diagonal. En este caso la expresión de la traza sería

$$\text{traza}(\text{cov}[\mathbf{x}]\mathbf{Q}) = \sum_{i=1}^{PN} \frac{\mathbf{Q}_{i,i}}{\text{cov}[\mathbf{x}]_{i,i}^{-1}}. \quad (\text{A.3})$$

A.2.2. Aproximación Circulante

En este caso lo que se propone es una aproximación de la matriz $\text{cov}[\mathbf{x}]^{-1}$ semicirculante por bloques, que podremos invertir de forma exacta en el dominio de Fourier. En Katsaggelos et al. (1993) y en Abad (2003), puede encontrarse una descripción detallada de esta aproximación, que se ha aplicado al problema de SR de imágenes rotadas en Villena et al. (2009a). En nuestro caso merece especial atención su utilización en la matriz $PN \times PN$ $\mathbf{C}_k(\mathbf{s}_k)$ de la expresión Ec. (2.2), que aparece en nuestro modelo de degradación y representa el movimiento de la imagen k -ésima de la secuencia de imágenes de BR con respecto a la imagen de referencia, que aproximaremos mediante la matriz

$$\bar{\mathbf{C}}_k(\mathbf{s}_k)_{i,1} = \frac{1}{PN} \sum_{l=1}^{PN} \mathbf{C}_k(\mathbf{s}_k)_{[(l+i-1) \bmod(PN)],l} \quad (\text{A.4})$$

También debemos tener en cuenta la matriz diagonal $PN \times PN$ $\mathbf{W}(\mathbf{u}^d)$ que forma parte de la inversa de la matriz de covarianza y cuyos elementos tienen la forma $\frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}_i^d}}$, donde $\mathbf{u}_i^d \in R^{+PN}$ y $d \in \{h, v\}$ aparecen en el modelo a priori basado en la norma ℓ_1 de los gradientes en horizontal y vertical, estudiados en el Cap.3. Aproximaremos $\mathbf{W}(\mathbf{u}^d)$ por su valor medio.

$$\bar{\mathbf{W}}(\mathbf{u}^d) = \left(\frac{1}{PN} \sum_{i=1}^{PN} \frac{1}{\sqrt{u_i^d}} \right) \mathbf{I}, \quad (\text{A.5})$$

De forma similar se obtendrán los correspondientes aproximaciones circulares en el resto de los casos de esta memoria.

Obsérvese cómo estos términos dependientes espacialmente han sido transformados en circulares promediando sus valores, lo que justifica porque la traza de una matriz es como un promedio de su diagonal.

Utilizando estas aproximaciones, podemos aplicar el esquema general descrito en Katsaggelos et al. (1993), en Abad (2003), para aproximar la matriz de covarianza y calcular trazas del tipo de las que aparecen en la Ec. (A.2).

A.2.3. Método Factorized Sparse Approximate Inverse (FSAI)

El método FSAI está basado en la factorización de Cholesky y, por tanto, es aplicable cuando las matrices sean simétricas definidas positivas, como en nuestro caso es la matriz $\mathbf{A}$ de la Ec. (A.1).

Aplicando la factorización de Cholesky a la matriz $\mathbf{A}$ resultaría

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^t, \quad (\text{A.6})$$

donde $\mathbf{L}$ es una matriz triangular inferior y

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{L}^{-1})^t \mathbf{L}^{-1}, \quad (\text{A.7})$$

El objetivo sería obtener la matriz $\mathbf{L}^{-1}$ y de esta forma también la matriz inversa de $\mathbf{A}$. Pero el problema se presenta cuando la matriz $\mathbf{A}$ es de grandes dimensiones y rala. En estos casos, no podemos garantizar que la matriz $\mathbf{L}$ resultante sea también rala tratable. La matriz $\mathbf{L}^{-1}$ podría llegar a tener casi todos sus elementos distintos de cero.

Korotina y Yeremin propusieron la utilización de un patrón de dispersión (conjunto de elementos de la matriz triangular inferior de la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ distintos de cero) para las citadas matrices, y la realización de una factorización de Cholesky incompleta. En concreto, en Kolotilina y Yeremin (1993), se propone un algoritmo para aproximar la inversa de la matriz rala $\mathbf{A}$, mediante la búsqueda de una matriz triangular inferior $\mathbf{G}$, con patrón de dispersión E , que minimice la expresión $\|\mathbf{I} - \mathbf{L}\mathbf{G}\|_F$ donde $\|\cdot\|_F$ es la norma de Frobenius (la norma de Frobenius de $\|\mathbf{X}\|_F = \sqrt{\text{traza}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})}$). En Kolotilina y Yeremin (1993) se propone el algoritmo A.1.

Algoritmo A.1 FSAI

- 1: Calcular la matriz triangular inferior $\hat{\mathbf{G}}$ con patrón de dispersión E , tal que, $(\hat{\mathbf{G}}\mathbf{A})_{i,j} = \mathbf{I}_{i,j}, \forall (i,j) \in E$.
 - 2: Calcular $\mathbf{D} = (\text{diag}(\hat{\mathbf{G}}))^{-1}$ y $\mathbf{G} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{G}}$.
-

Como es fácil comprobar, la matriz inversa aproximada sería

$$\mathbf{A}^{-1} \approx \mathbf{G}^t \mathbf{G} \quad (\text{A.8})$$

Para comprender mejor el funcionamiento del citado algoritmo proponemos un ejemplo sencillo. Dadas la matriz $\mathbf{A}$ y el patrón de dispersión representado por la matriz triangular inferior E de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz $\hat{\mathbf{G}}$ será:

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} g_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ g_{2,1} & g_{2,2} & 0 & 0 \\ g_{3,1} & 0 & g_{3,3} & 0 \\ g_{4,1} & g_{4,2} & 0 & g_{4,4} \end{bmatrix}.$$

Aplicando $(\hat{\mathbf{G}}\mathbf{A})_{i,j} = \mathbf{I}_{i,j}, \forall (i,j) \in E$:

$$\begin{bmatrix} g_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ g_{2,1} & g_{2,2} & 0 & 0 \\ g_{3,1} & 0 & g_{3,3} & 0 \\ g_{4,1} & g_{4,2} & 0 & g_{4,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obtenemos los elementos de $\hat{\mathbf{G}}$ resolviendo los sistemas de ecuaciones:

$$g_{1,1} = 1; \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{2,1} \\ g_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{3,1} \\ g_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{4,1} \\ g_{4,2} \\ g_{4,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Obtenemos

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2857 & 0,3571 & 0 & 0 \\ -0,1154 & 0 & 0,1923 & 0 \\ -0,0351 & -0,0175 & 0 & 0,1228 \end{bmatrix}.$$

Calculamos $\mathbf{D} = (\text{diag}(\hat{\mathbf{G}}))^{-1}$ y $\mathbf{G} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{G}}$, resultando

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2,2361 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,6733 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,2804 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,8536 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2857 & 0,3571 & 0 & 0 \\ -0,1154 & 0 & 0,1923 & 0 \\ -0,0351 & -0,0175 & 0 & 0,1228 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,4472 & 0 & 0 & 0 \\ -0,4781 & 0,5976 & 0 & 0 \\ -0,2631 & 0 & 0,485 & 0 \\ -0,1001 & -0,0501 & 0 & 0,3504 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{GAG}^t = \mathbf{GG}^t \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,6290 & 0 \\ 0 & -0,6290 & 1 & -0,1317 \\ 0 & 0 & -0,1317 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observando $\mathbf{GG}^t \mathbf{A}$ podemos hacernos una idea de la calidad de la estimación de la matriz inversa obtenida mediante el algoritmo FSAI.

Habitualmente, se suele adoptar como patrón de dispersión el mismo que presenta la matriz $\mathbf{A}$. Esto es, los elementos a uno en el patrón de dispersión son los elementos distintos de cero en la matriz $\mathbf{A}$.

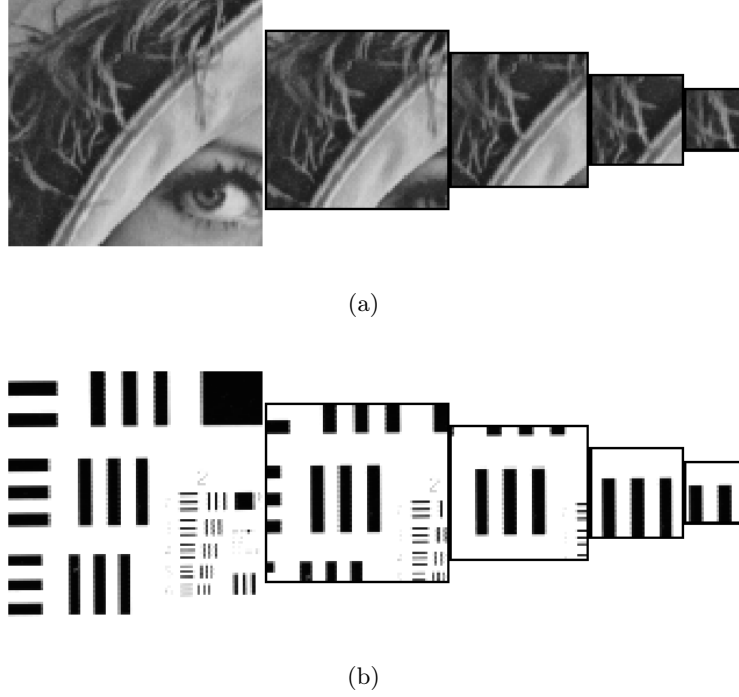


Figura A.4: Serie de imágenes de AR utilizadas para simular la serie de imágenes obtenidas mediante SR con tamaños 102×102 , 72×72 , 54×54 , 36×36 y 24×24 .

A.3. Experimentos

En este apartado se comparan los valores exactos de diversas trazas del tipo de la que aparece en la Ec. (A.2), con los obtenidos mediante los métodos aproximados de inversión de matrices de Jacobi, aproximación circulante, método FSAI con el mismo patrón de dispersión que la matriz $\text{cov}[\mathbf{x}]^{-1}$, y el algoritmo de Lanczos.

Hemos trabajado con distintos tipos de matrices $\mathbf{Q}$, que aparecen en la Ec. (A.2). En primer lugar hemos considerado el caso $\mathbf{Q} = \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)^t \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)$, con $\mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)$ definido en la Ec. (2.2), como parte del modelo de observación. Hemos utilizado también las matrices $\mathbf{Q} = \Delta_h^t \Delta_h$ y $\mathbf{Q} = \Delta_v^t \Delta_v$, correspondientes al modelo a priori ℓ_1 descritas en el cap. 3, siendo Δ_h y Δ_v las matrices correspondientes a las diferencias de primer orden horizontales y verticales. Por último hemos tomado la matriz $\mathbf{Q} = \mathcal{C}^t \mathcal{C}$ correspondiente al modelo a priori SAR, descritas en el cap. 3, siendo $\mathcal{C}$ la matriz correspondiente al operador laplaciano.

Los experimentos se han realizado sobre los conjuntos de imágenes de cinco tamaños distintos que se muestran en la figura A.4. Estas imágenes

son pequeñas, con tamaños comprendidos entre 20×20 y 110×110 píxeles, para facilitar el cálculo exacto de las trazas. Se han generado series de 5 observaciones de BR, para el factor de escala $\sqrt{P} = 2$, y de 17 observaciones para $\sqrt{P} = 4$, con ángulos de rotación en el intervalo $[-20^\circ, 20^\circ]$, a las que se ha añadido ruido blanco Gaussiano con $SNR = 10db$. En el caso $\sqrt{P} = 4$ hemos tomado sólo las imágenes de la figura A.4 con los tres tamaños mayores, para evitar que las imágenes de BR fuesen demasiado pequeñas.

Como ya hicimos en la sección A.1, en estos experimentos hemos utilizado las matrices inversas de covarianza $\text{cov}[\mathbf{x}]^{-1}$ correspondientes a una iteración escogida al azar del método de SR propuesto en Villena et al. (2010c) y que se ha descrito en el Cap. 4, con una combinación del modelo a priori basado en la norma ℓ_1 de los gradientes horizontal y vertical, con un peso $\lambda = 0,85$, y del modelo SAR con un peso $1 - \lambda$.

No hemos apreciado diferencias significativas en las comparaciones realizadas con respecto a diferentes factores de magnificación, modelo a priori adoptado, diferentes rangos para el ángulo de rotación entre las observaciones y diferentes tipos de imagen de AR reconstruida. Para no extendernos en la presentación de todos los resultados obtenidos presentamos sólo los resultados obtenidos con factor de magnificación 2 y tomando la serie de imágenes de AR mostrada en la figura A.4(a) y (b).

Las tablas A.1, A.2, A.3, A.4 muestran los valores exactos y aproximados de las trazas para la serie de imágenes de AR de la figura A.4 (a), cuando el factor de escala es $\sqrt{P} = 2$ y la tabla A.5 muestra los tiempos de ejecución en un ordenador con procesador Intel(R) Core(TM) i7CPU 950@ 3.07GH. La figura A.5 muestra representaciones gráficas de los resultados obtenidos para la serie de imágenes de AR de la figura A.4 (b). En las figuras A.5 y A.6 se comparan los valores de las trazas, y en la figura A.7 los tiempos de ejecución.

En general, hemos de reseñar el buen comportamiento del método FSAI y circulante propuesto en Villena et al. (2009a), aunque este último muestra un comportamiento irregular al evaluar la traza requerida para la estimación del hiperparámetro del modelo a priori SAR. El método de Lanczos, en general, ofrece los resultados peores, debido a los problemas de redondeo, que son su principal inconveniente (ver Saad (2003)). El método de Jacobi proporciona mejores resultados que el de Lanczos y peores que el resto, pero a su favor tiene la simplicidad, el bajo coste computacional y su regularidad para todas las trazas.

A.4. Conclusiones

Se han descrito técnicas para la estimación aproximada de los parámetros de los modelos propuestos en los capítulos 3, 4 y 5, basados en métodos de inversión aproximada de matrices. Se ha realizado un estudio

Tabla A.1: Valore estimados para $\text{traza}(\text{cov}[\mathbf{x}]\Delta_h^t\Delta_h)$

Tamaño $\mathbf{x}$	102×102	72×72	54×54	36×36	24×24
Exacto	1.2197e-3	1.3576e-3	1.3867e-3	1.4466e-3	1.5943e-3
FSAI	9.8101e-4	1.0730e-3	1.0907e-3	1.1217e-3	1.2061e-3
Circulante	2.1443e-3	2.2527e-3	2.2518e-3	2.2437e-3	2.2712e-3
Jacobi	6.6907e-5	6.7156e-5	6.7423e-5	6.7482e-5	6.6635e-5
Lanczos	1.3291e-7	4.5210e-7	1.2308e-6	5.8735e-6	2.0287e-5

Tabla A.2: Valore estimados para $\text{traza}(\text{cov}[\mathbf{x}]\Delta_v^t\Delta_v)$

Tamaño $\mathbf{x}$	102×102	72×72	54×54	36×36	24×24
Exacto	1.2063e-3	1.3339e-3	1.3542e-3	1.4133e-3	1.5546e-3
FSAI	9.8642e-4	1.0755e-3	1.0861e-3	1.1154e-3	1.1995e-3
Circulante	2.2367e-3	2.2750e-3	2.2553e-3	2.2336e-3	2.2029e-3
Jacobi	6.6907e-5	6.7156e-5	6.7423e-5	6.7482e-5	6.6635e-5
Lanczos	1.3150e-7	4.6011e-7	1.2345e-6	5.4063e-6	1.8618e-5

Tabla A.3: Valore estimados para $\text{traza}(\text{cov}[\mathbf{x}]\mathcal{C}^t\mathcal{C})$

Tamaño $\mathbf{x}$	102×102	72×72	54×54	36×36	24×24
Exacto	2.0349e+1	1.1387e+1	6.6734e+0	3.1692e+0	1.5983e+0
FSAI	1.8874e+1	1.0414e+1	6.0335e+0	2.8209e+0	1.3824e+0
Circulante	1.3548e+1	7.0463e+0	3.9937e+0	1.8047e+0	8.3560e-1
Jacobi	9.1907e-1	4.5965e-1	2.5958e-1	1.1547e-1	5.0676e-2
Lanczos	1.2857e-3	2.5493e-3	4.0351e-3	9.1183e-3	1.4930e-2

Tabla A.4: Valore estimados para la media de $\text{traza}(\text{cov}[\mathbf{x}]\mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)^t\mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k))$

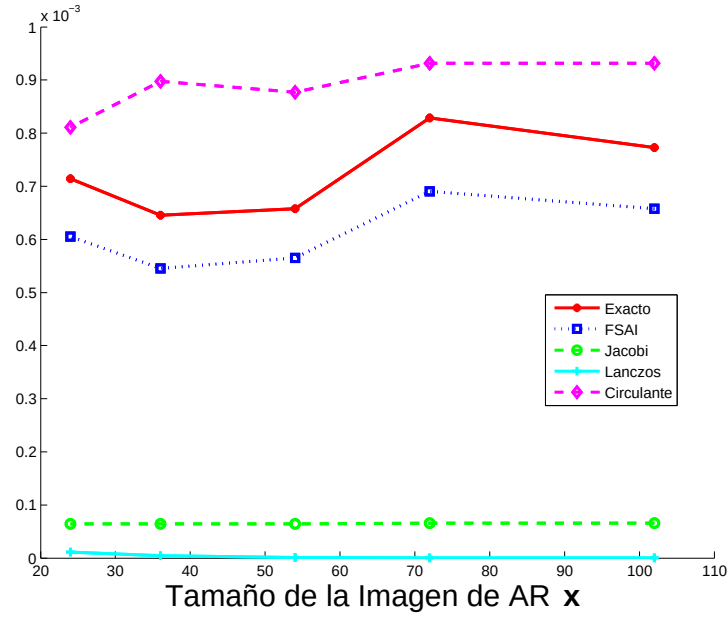
Tamaño $\mathbf{x}$	102×102	72×72	54×54	36×36	24×24
Exacto	4.679e-3	2.398e-3	1.379e-3	6.334e-4	2.947e-4
FSAI	5.058e-3	2.588e-3	1.482e-3	6.785e-4	3.138e-4
Circulante	1.856e-3	9.968e-4	6.127e-4	3.163e-4	1.696e-4
Jacobi	6.858e-3	3.430e-3	1.932e-3	8.607e-4	3.838e-4
Lanczos	2.393e-5	2.990e-5	3.514e-5	4.758e-5	5.355e-5

Tabla A.5: Tiempo de CPU consumido

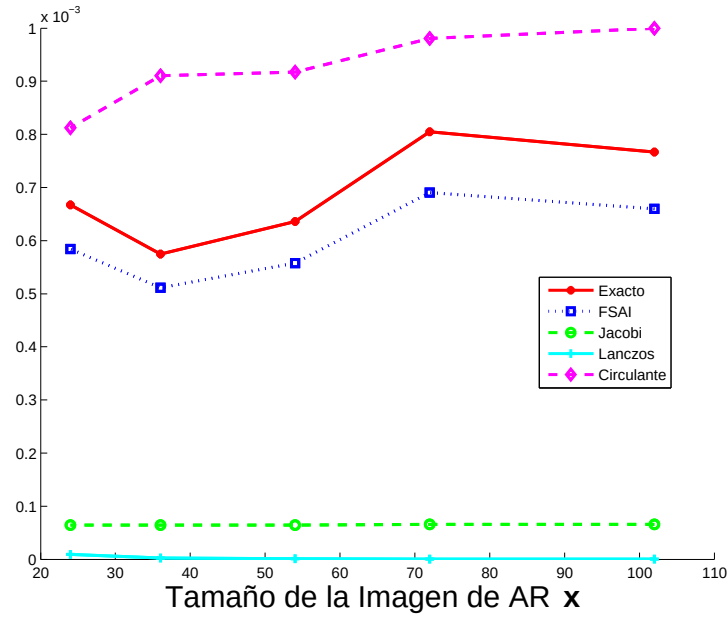
Tamaño $\mathbf{x}$	102×102	72×72	54×54	36×36	24×24
Exacto	415.34	82.79	23.12	3.75	0.51
FSAI	7.86	3.18	1.44	1.36	0.46
Circulante	0.36	0.15	0.10	0.06	0.04
Jacobi	0.09	0.07	0.09	0.06	0.03
Lanczos	46.54	23.89	15.79	1.12	0.52

experimental de los valores obtenidos para las trazas que debemos calcular, utilizando los distintos métodos de inversión aproximada de matrices ralas, como el de Jacobi, el circulante, el FSAI y el de Lanczos. A la vista de los resultados experimentales mostrados en la sección anterior, se puede afirmar que las técnicas de inversión aproximada de matrices FSAI y circulante se aproximan bastante a los resultados exactos, mientras que los métodos de Jacobi y de Lanczos, dan peores resultados. En cuanto al coste computacional, observamos que el método de Jacobi es más eficiente, con diferencia, que el resto. Le sigue la aproximación circulante, mientras que la aproximación FSAI y el método de Lanczos se alejan, en este orden, considerablemente.

Esto nos lleva a seleccionar o bien la aproximación circulante por su precisión y eficiencia computacional como ya se hizo en Villena et al. (2009a), o la aproximación de Jacobi por su eficiencia computacional y simplicidad, como se hace por ejemplo en Babacan et al. (2010), Villena et al. (2010a) Villena et al. (2010c), Villena et al. (2010c) y en Villena et al. (2011).

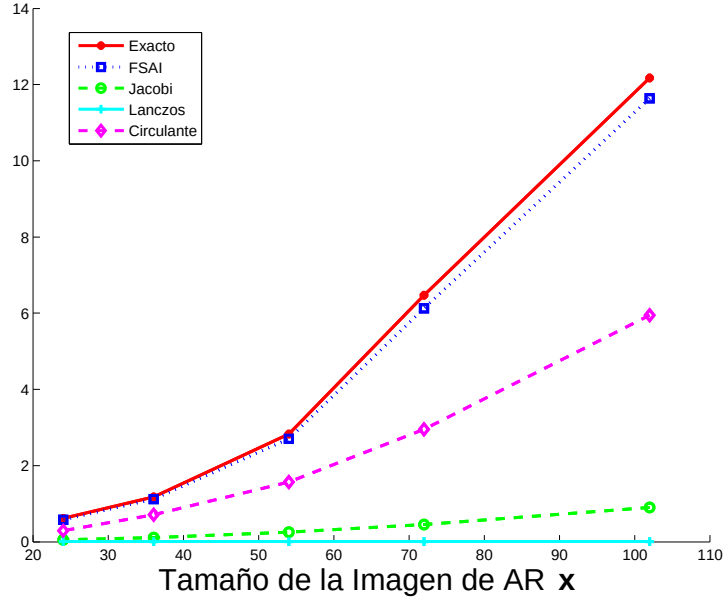


(a)

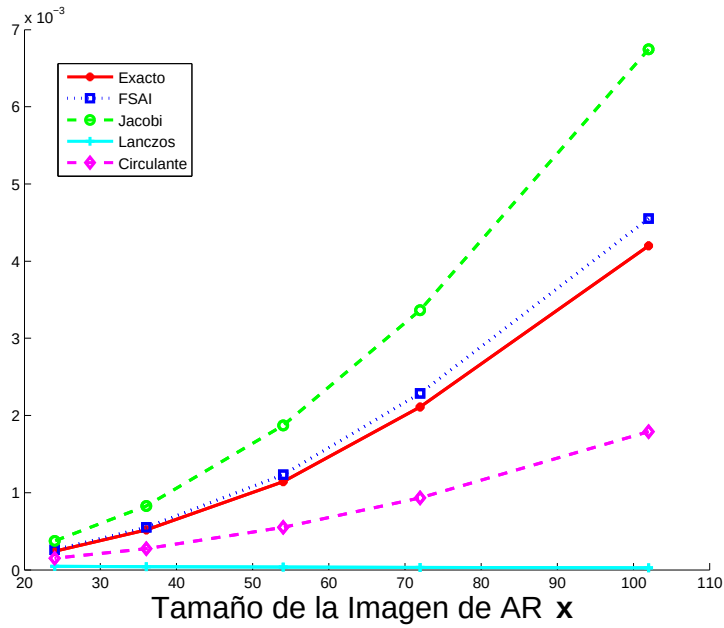


(b)

Figura A.5: Estimación de las trazas para los posibles valores de $\mathbf{Q}$ necesarias para la reconstrucción de la imagen de AR $\mathbf{x}$ usando la combinación de modelo a priori SAR y la norma ℓ_1 del gradiente horizontal y vertical, con $\lambda = 0,85$. (a) para $\mathbf{Q} = \Delta_h^t \Delta_h$ y (b) para $\mathbf{Q} = \Delta_v^t \Delta_v$.



(a)



(b)

Figura A.6: Estimación de las trazas para los valores de $\mathbf{Q}$ necesarios para estimación de los hiperparámetros usando la combinación de modelo a priori SAR y el modelo basado en la norma ℓ_1 con $\lambda = 0,85$: (a) para $\mathbf{Q} = \mathcal{C}^t \mathcal{C}$ y (b) para $\mathbf{Q} = \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)^t \mathbf{B}_k(\mathbf{s}_k)$.

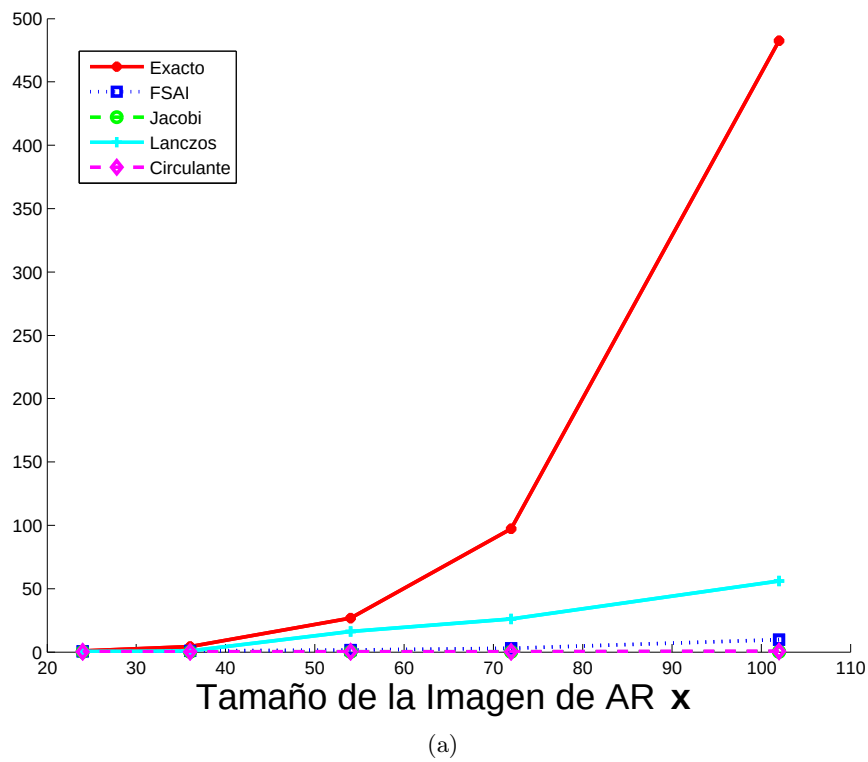


Figura A.7: Comparación del tiempo de CPU requerido por cada preconditionante para obtener la matriz inversa aproximada de $\text{cov}[\mathbf{x}]^{-1}$.

Apéndice B

Software de Superresolución

B.1. Introducción

Parte del esfuerzo invertido en la preparación de esta memoria se ha dedicado a la implementación de una aplicación software de SR que recoge los métodos propuestos, así como, el resto de métodos utilizados en los experimentos. Este software ha sido codificado en MATLAB®(versión 7.9.0.529 (R2009b)) y posee una interface de usuario gráfica (GUI de MATLAB) (véase figura B.1).

El software se ha diseñado para satisfacer a los siguientes requisitos funcionales:

- Permitir la ejecución de los métodos de SR en modo simulado y en modo real.
- Recoger al menos los métodos de SR siguientes:
 - Interpolación bilineal.
 - Método propuesto en Babacan et al. (2011) basado en el modelo a priori TV.
 - Método descrito en el algoritmo 3.1 y que utiliza el modelo a priori SAR.
 - Método resumido en el algoritmo 3.2, propuesto en Villena et al. (2009a), con el modelo a priori basado en la norma ℓ_1 de los gradientes horizontal y vertical.
 - Método definido por el algoritmo 5.1 con $c = \ell_1$, propuesto en Villena et al. (2010b), Villena et al. (2011) y basado en la combinación de modelos a priori SAR y la norma ℓ_1 y con estimación de los parámetros de registrado.
 - Método recogido por el algoritmo 5.2 con $c = TV$ propuesto en Villena et al. (2010a), que combina los modelos a priori SAR y TV y estima los parámetros de registrado.

- Poder almacenar los resultados estimados (las imágenes de AR y los parámetros del registrado).
- Poder interrumpir la ejecución de los métodos en cualquier iteración, pudiéndose salvar los valores estimados hasta ese momento.

La ejecución en modo simulado nos permite comprobar la calidad de la imágenes de AR estimadas y la precisión de los parámetros del movimiento estimados con cada método de SR (vease las secciones de experimentos en los capítulos 3, 4 y 5). En cambio, el modo real nos permite aplicar los citados métodos de SR a observaciones reales. Este modo de ejecución se ha utilizado en el experimento con imágenes reales del capítulo 5.

Previo a la ejecución de los métodos de SR y dependiendo del modo de ejecución elegido, es necesario introducir la información inicial requerida por los citados métodos. En el caso de optar por el modo simulado, debemos introducir los datos necesarios para generar la secuencia de imágenes observadas en base a la Ec. (2.1). Esto es, la imagen original de AR, el número de observaciones que se desean generar, el emborronamiento, el ruido Gaussiano aditivo y el factor de submuestreo. Mientras que en el modo real se deben introducir las observaciones de BR, el emborronamiento supuesto o estimado previamente y el factor de magnificación deseado.

Una vez que ha sido cumplimentada toda la información inicial, lo que queda es seleccionar el método de SR y realizar la ejecución. Note que al seleccionar los métodos propuestos de mezcla de modelos a priori, además, será necesario introducir, previamente, el valor del factor de mezcla (λ) entre $[0, 1]$.

La interfaz gráfica de usuario permite navegar de forma intuitiva por la aplicación y ayuda a cumplimentar toda la información previa necesaria para cada método de SR disponible. En cada iteración se puede visualizar la imagen de AR reconstruida y los parámetros del movimiento, si estos fuesen estimados.

El acceso y navegación de la aplicación a través de la interfaz gráfica de usuario desarrollada se describe en la sección siguiente.

B.2. Manual de Usuario

En esta sección se describe la interacción entre el usuario y la aplicación. Para poder ejecutarla será necesario disponer del software: MATLAB®(versión 7.9.0.529 (R2009b)).

En la interacción con la aplicación se distinguen los pasos siguientes:

1. Inicio de la aplicación.
2. Selección del modo de ejecución (**Real** o **Simulated**).

3. Cumplimentado de la información previa inicial.
4. Selección del método de SR a ejecutar.
5. Monitorización de la ejecución y almacenamiento de los resultados.

Pasamos a continuación a describir cada uno de estos pasos.

B.2.1. Inicio

Para iniciar la aplicación se debe situar en el directorio de la aplicación y ejecutar el programa ***SuperResolutionv1***, entonces aparecerá el interfaz gráfico de la aplicación, como se muestra en la figura B.1. En la interfaz aparecen las siguientes áreas de interacción:

1. **Mode**: permite seleccionar el modo de ejecución: *simulado* o *real*.
2. **Low Resolution Image**: es el área donde se presentan las observaciones simuladas o se cargan y representan las observaciones reales en modo real.
3. **High Resolution Image (Simulated Mode)**: se utiliza sólo en modo simulado y sirve para cargar y visualizar la imagen de AR a partir de la cual se generarán las observaciones.
4. **LR Genarator**: se activa sólo en modo simulado y nos permite cumplimentar toda la información requerida para la generación de las observaciones a partir de la imagen cargada en el área anterior (3).
5. **Super Resolution**: permite seleccionar el método de SR que se desea aplicar a las observaciones.
6. **High Resolution Image**: es el área en donde se representa la imagen de AR generada por el método seleccionado, actualizada en cada iteración. Esto nos permite observar cómo evoluciona la reconstrucción.
7. **Results**: en modo simulado nos informa del error de la imagen de AR reconstruida y los valores de los parámetros del movimiento verdaderos y estimados si procede. En modo real muestra los parámetros del movimiento estimados.

En el inicio de la ejecución, sólo se nos permite interaccionar con el área **Mode**, debiendo seleccionar alguno de los dos modos de ejecución.

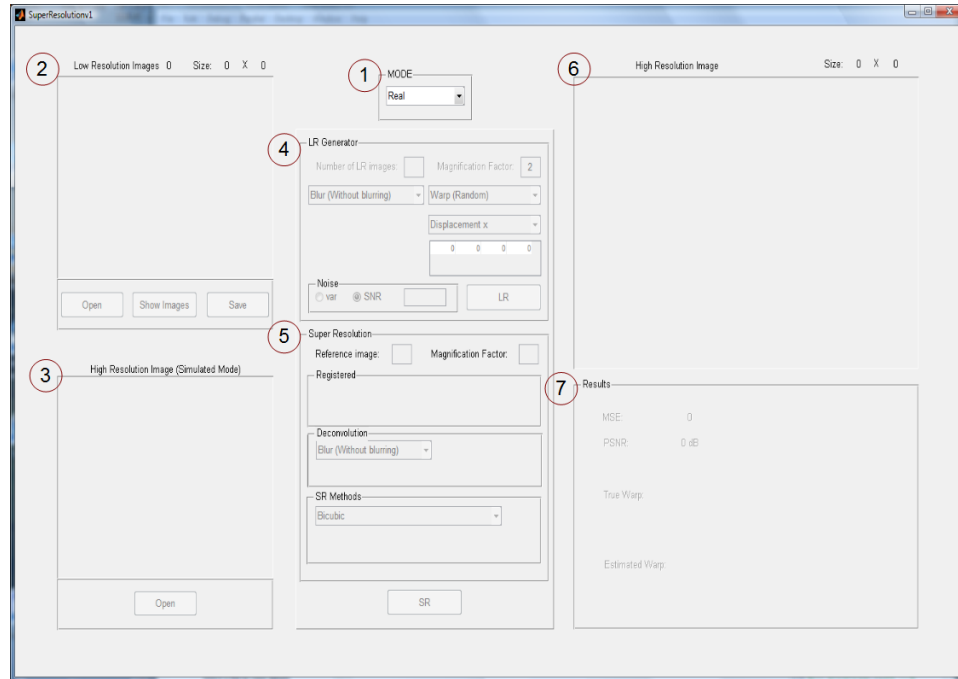


Figura B.1: Interfaz gráfica de la aplicación. Los números desde el 1 hasta 7 sobre círculos rojos indican las áreas de interacción de la interfaz.

B.2.2. Modo de ejecución

Situado el cursor sobre el campo **MODE** se nos permite seleccionar el modo deseado(ver figura B.2).

El modo por defecto es el modo **Real**. Teniendo en cuenta el modo seleccionado, la interfaz nos habilita los campos requeridos para cumplimentar toda la información previa necesaria para la ejecución de los métodos de SR disponibles.

Los modos de ejecución serán descritos en secciones distintas ya que, el modo seleccionado condiciona la forma de navegar por la aplicación.

B.2.2.1. Modo Simulado

Al seleccionar el modo simulado, se activa el botón **Open** en el área **High Resolution Image (Simulated Mode)** (véase figura B.3).

Cuando se pulsa el botón **Open**, aparece el gestor de archivos, para seleccionar la imagen de AR a utilizar como muestra la figura B.4. Por ejemplo, supongamos que seleccionamos la imagen *lenag80.png*, aparecerá la imagen y se activará el área **LR Generator** (ver figura B.5), desde donde se podrá cumplimentar la información necesaria para generar las observaciones

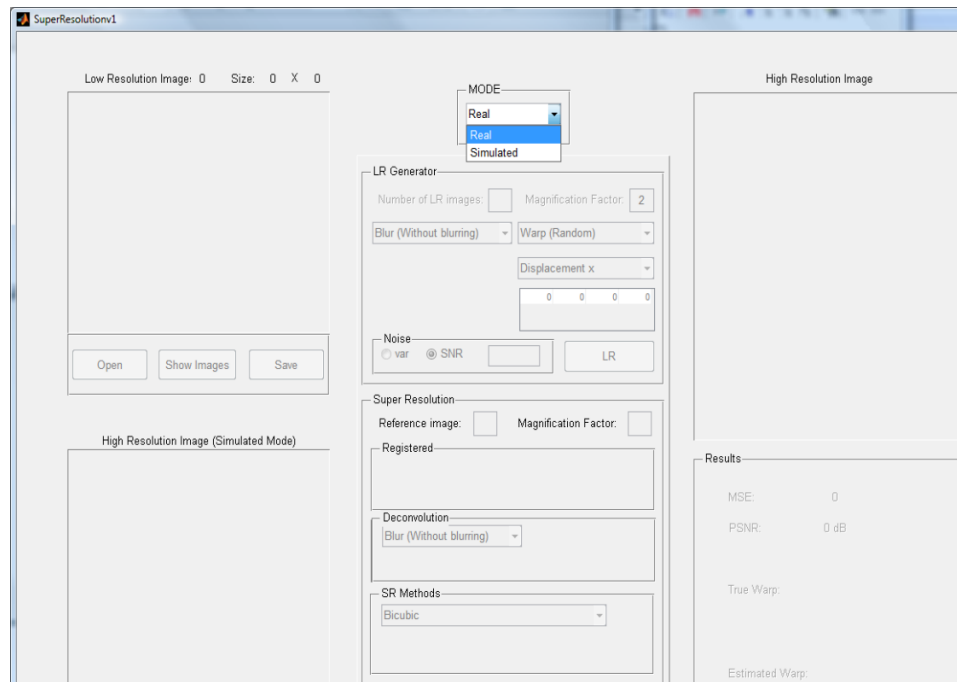


Figura B.2: Apariencia de la Interfaz gráfica cuando se activa el área **Mode**.

mediante la Ec. (2.1).

Todos los campos tienen un valor por defecto que se puede modificar. La función de emborronamiento queda definida por el núcleo de convolución seleccionado, como muestra la figura B.6. Para cada tipo de emborronamiento, la aplicación pide los parámetros necesarios para definir el núcleo de la función de emborronamiento, partiendo de un valor por defecto.

En el caso de seleccionar el núcleo tipo **Customized** la aplicación abre una nueva ventana, como se muestra en la figura B.7, en donde se pueden introducir los valores de cada elemento del núcleo, así como, las opciones de salvar el núcleo, o de cargarlo, si antes ha sido introducido y salvado.

Los parámetros de movimiento se pueden definir de tres formas: **Warp (Random)**, **Customized** y **Example**, según queramos generarlos aleatoriamente, introduciendo los valores del movimiento (ángulo de rotación y desplazamiento en horizontal y vertical) para cada observación, o usar los valores de los parámetros de los experimentos de los capítulos 3, 4 y 5, respectivamente. Ver figura B.8.

Por último, debemos definir la cantidad de ruido Gaussiano. Este se podrá definir de dos formas: mediante el valor de la varianza, o mediante el valor de la relación señal ruido (SNR), ambas formas están asociadas a unos botones autoexcluyentes. Dependiendo del botón activado, el campo

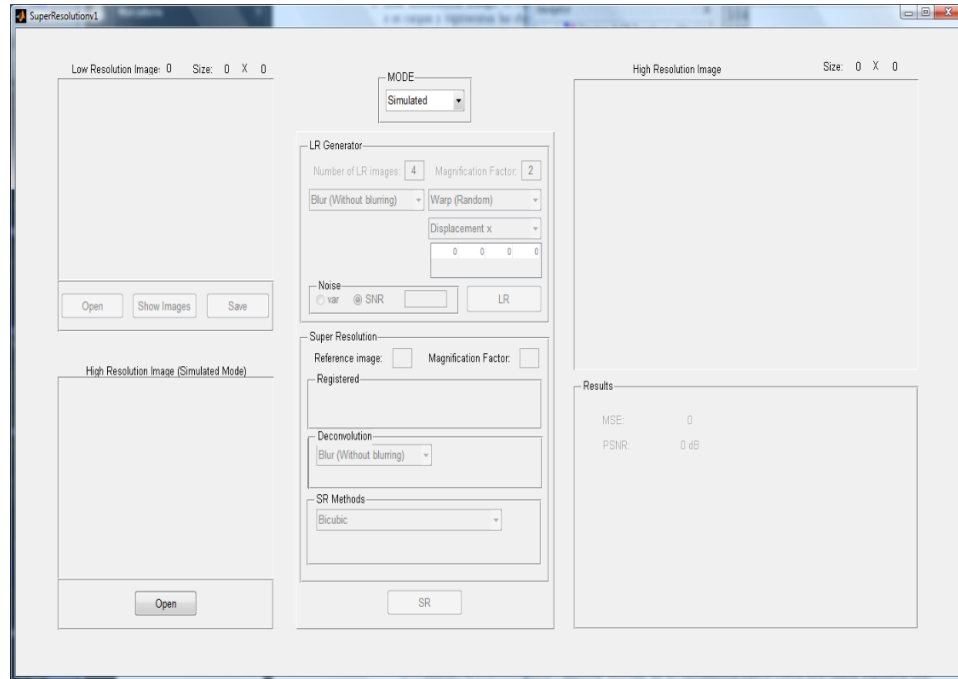


Figura B.3: Apariencia de la Interfaz gráfica cuando se activa el área **Mode** a **Simulated**. Observe como el botón **Open** aparece activo.

numérico adyacente recoge el valor de la varianza o el valor de la relación señal ruido (medido en db) respectivamente. Por defecto se activa el modo **SNR**, con valor 30.

Cuando se hayan suministrado todos los datos necesarios para la generación de las observaciones, se podrá pulsar el botón **LR**, resultando, por ejemplo, lo que aparece en la figura B.9. Observe que ahora se han activado las áreas **Low Resolution Image** y **Super Resolution**. En el área **Low Resolution Image** se nos permite salvar las observaciones generadas. Si optamos por guardar las observaciones, aparece el gestor de archivos para que le demos un nombre genérico a las observaciones; por ejemplo, *lenag.png* y la aplicación generará los archivos *lenag_1.png*, *lenag_2.png*, *lenag_3.png*, *lenag_4.png* y *lenag_5.png* para cada una de las observaciones generadas.

Ahora podremos aplicar los métodos de SR a las observaciones generadas. Observe que en modo simulado sólo se activan el campo **Reference image** y las subáreas **Registered** y **SR Methods**, del área **Super Resolution**. El subárea **Registered** permite elegir entre utilizar los valores verdaderos de los parámetros del movimiento o estimarlos. Por defecto, se utilizan los valores verdaderos de los parámetros del movimiento.

El siguiente paso sería seleccionar el método de SR a ejecutar, como

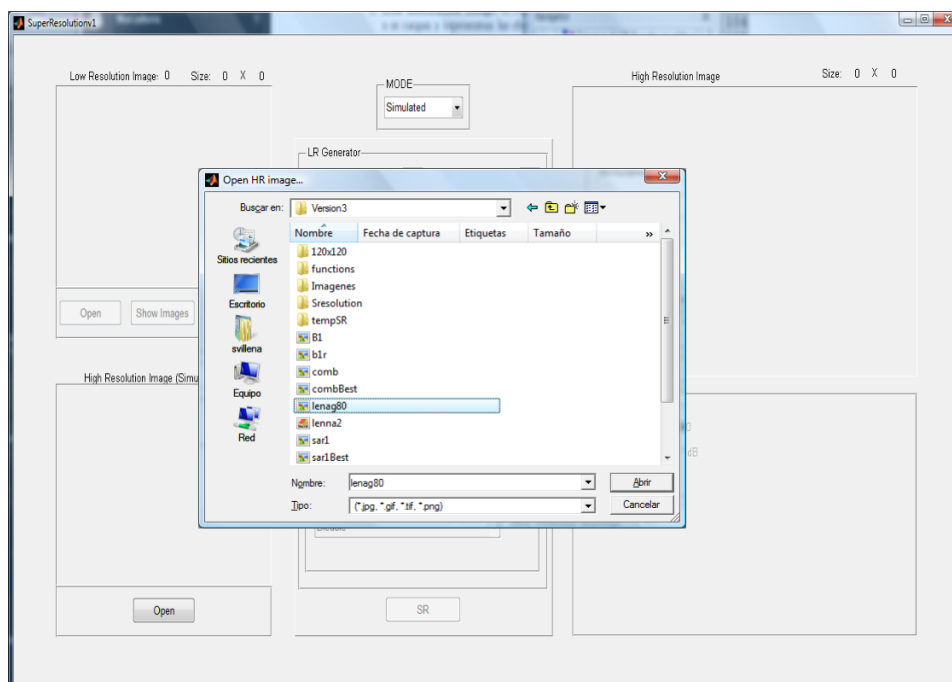


Figura B.4: Apariencia de la Interfaz gráfica cuando se pulsa el botón **Open**.

muestra la figura B.10.

En este punto de la ejecución de la aplicación, permanecen activadas las áreas **Low Resolution Image**, **Mode**, **High Resolution Image (Simulated Mode)**, **LR Generator** y **Super Resolution**. Esto significa que se pueden cambiar los valores de cualquiera de los campos en las citadas áreas, y generar las observaciones de nuevo, ofreciendo la posibilidad de salvar las observaciones generadas antes.

Para iniciar la ejecución del método de SR seleccionado basta con pulsar el botón **SR**, y las áreas **High Resolution Image** y **Results** serán activadas como se muestra en la figura B.11. En cada iteración se muestran la imagen AR estimada y los indicadores de calidad de la imagen reconstruida. En cualquier momento, se podrá paralizar la ejecución pulsando el botón **Cancel**. Al terminar la ejecución del método, por alcanzar la convergencia o por cancelación, aparecerán los valores verdaderos (y los estimados, si corresponde) de los parámetros del movimiento (ver figura B.12).

También se ofrece la opción de elegir la reconstrucción de mejor calidad (la reconstrucción con mayor PSNR y que no necesariamente debe coincidir con la alcanzada en la última iteración) pulsando el botón **Best Results** como muestra la figura B.13, que al ser pulsado de nuevo vuelve a mostrar la reconstrucción anterior. Ambas reconstrucciones, se pueden salvar pulsando

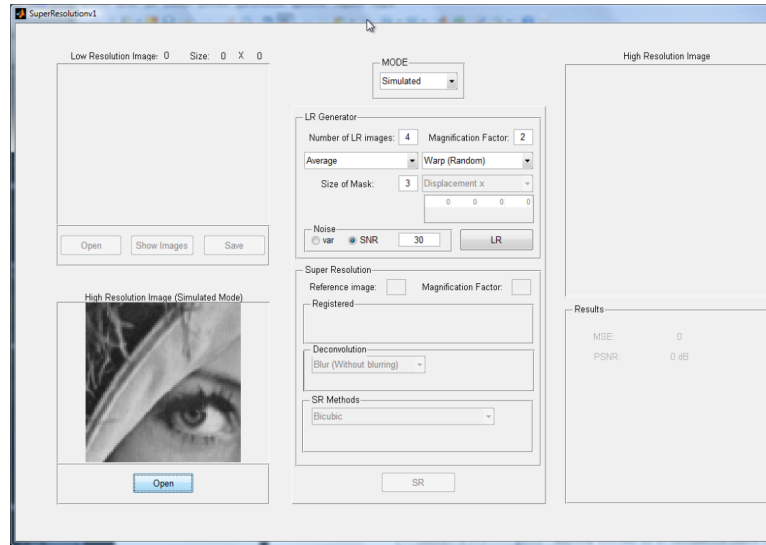


Figura B.5: Apariencia de la Interfaz gráfica cuando se ha seleccionado la imagen de AR de partida.

el botón **Save**.

Si se opta por salvar la reconstrucción de AR, la aplicación lanza al administrador de archivos, para indicar el nombre del archivo donde se almacenará la imagen de AR. También se generará otro archivo con el mismo nombre pero terminado en *_Dat.mat* con los valores de los parámetros estimados en una estructura de datos llamada *outopt* (ver figura B.14).

Cuando se aplican los métodos de SR basados en combinación de modelos a priori, como por ejemplo se muestra en la figura B.15, aparece un campo para indicar el valor del coeficiente de mezcla, entre 0 y 1. Si se indica el valor 0, valor por defecto, sólo se aplica el modelo a priori SAR.

B.2.2.2. Modo Real

Al seleccionar el modo Real se activa el área **Number of Observations** y el botón **Open** (ver figura B.16).

Al pulsar el botón **Open** aparece el gestor de archivos, en donde se indicará el nombre del archivo que contiene la observación. Obtenida la primera observación, se activan, además, los botones **Show Images** y **End**. Para introducir más observaciones basta con volver a pulsar el botón **Open** y repetir la misma operación que antes, permaneciendo el gestor de archivos en el mismo directorio desde donde se obtuvo la última observación. El proceso de carga de las observaciones finaliza pulsando el botón **End**.

Al pulsar el botón **End**, se activa el área **Super Resolution**, permi-

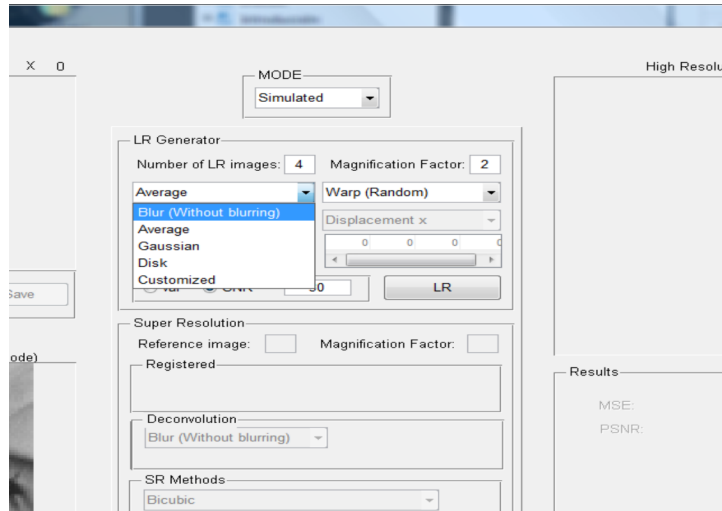


Figura B.6: Selección del nucleo de emborronamiento.

tiendo cambiar el factor de magnificación (por defecto es 2) y el nucleo de la función de emborronamiento (por defecto es sin emborronamiento) en el subárea **Deconvolution**.

Como en el modo simulado, el siguiente paso es seleccionar el método de SR a ejecutar y pulsar el botón **SR**. En este modo, las áreas **High Resolution Image** y **Results** aparece como muestra la figura B.17, y al terminar la ejecución del método se muestran los parámetros del movimiento estimados y se ofrece también la posibilidad de salvar los resultados pulsando el botón **Save**, ver figura B.18.

B.3. Archivos Generados en la Ejecución

Además de monitorizar la ejecución de los métodos implementados mediante la interface gráfica, en el directorio **tempSR** se podrán encontrar archivos tipo *log* que contienen la información de los parámetros estimados en cada iteración para cada método ejecutado, como se muestra en la figura B.19, para la ejecución en modo real mostrada en la figura B.18.

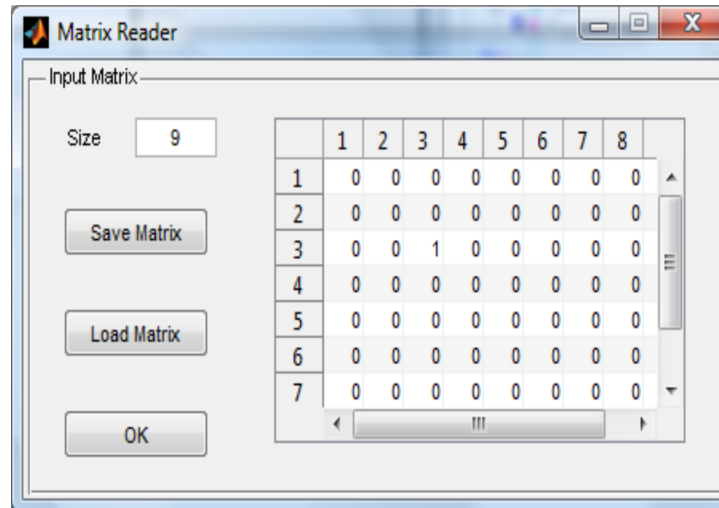


Figura B.7: Matriz que definir el núcleo de emborronamiento en modo **Customized**.

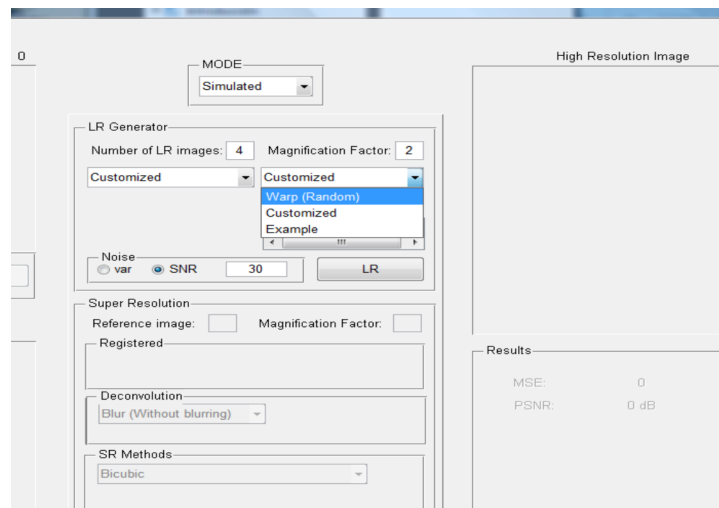


Figura B.8: Modos de definir los parámetros de movimiento.

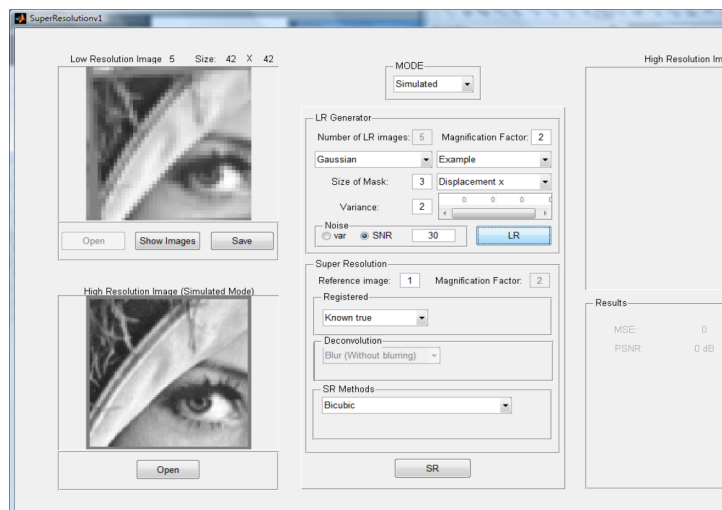


Figura B.9: Generación de las observaciones.

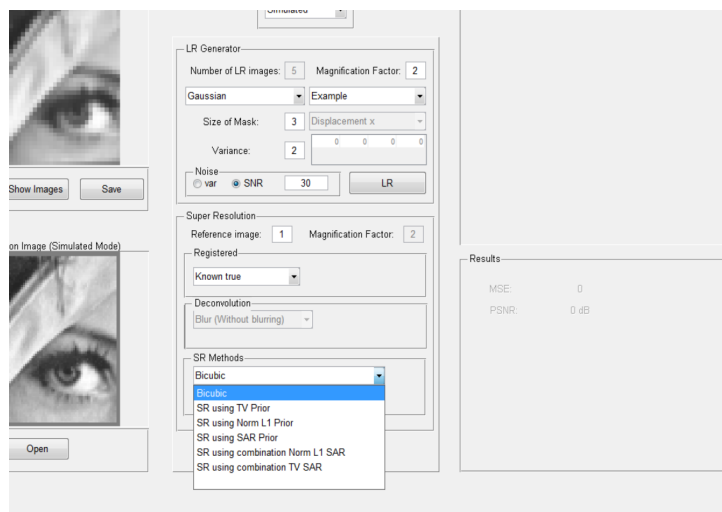


Figura B.10: Métodos de SR disponibles.

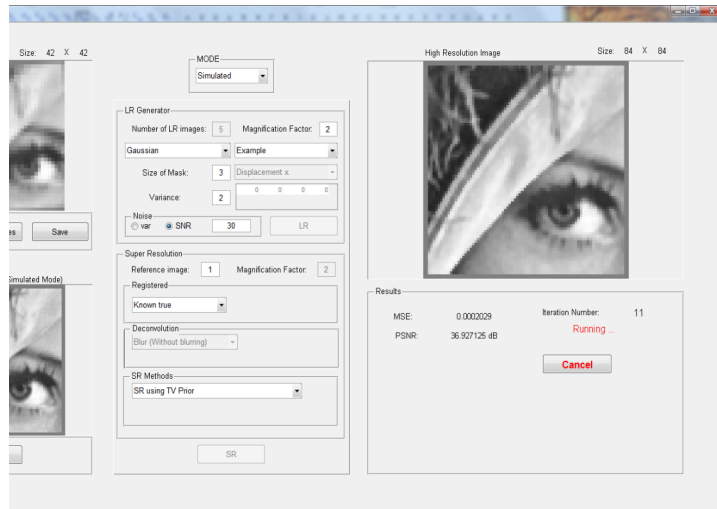


Figura B.11: Ejecutando método de SR.

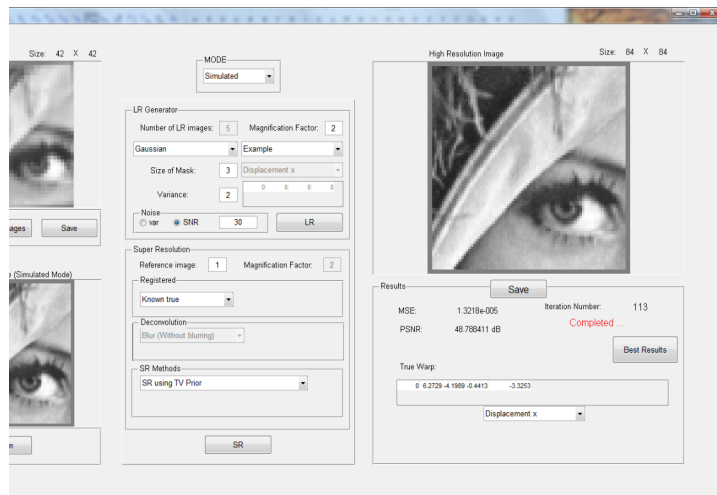


Figura B.12: Ejecución de método de SR completado.

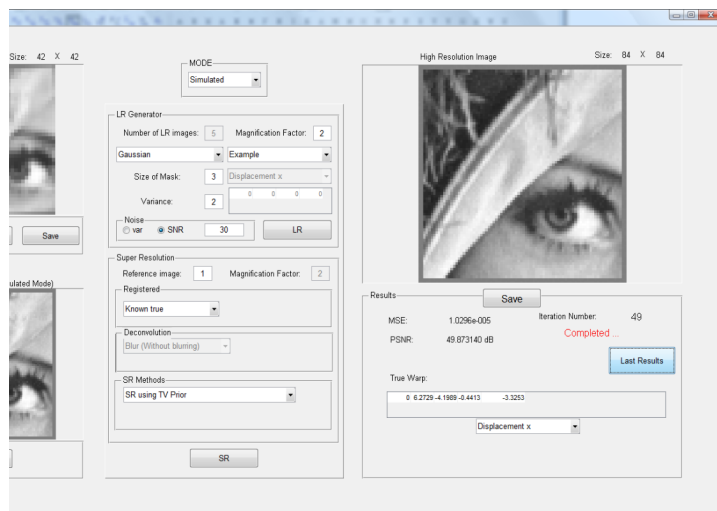


Figura B.13: Muestra la reconstrucción mejor.

Field	Value	Min	Max
betak	[3.8420e+08, 4.9222e+...	3.8420...	4.9222...
alpha_h	4.8636	4.8636	4.8636
alpha_v	5.6988	5.6988	5.6988
Lambdas	<1x5 cell>		
iconv	1.3873e-04	1.3873...	1.3873...
theta	[0, -0.0956, 0.0618, 0.03...	-0.0956	0.0686
tw	[0.6, 2.729, -4.1989, -0.4...	-4.1989	6.2729
ty	[0.5, 4.883, 0.4143, -3.06...	-3.0683	5.4883
z	54	54	54
MSEs	<1x54 double>	7.5136...	0.0017...
MSE	7.5642e-06	7.5642...	7.5642...
PSNRs	<1x54 double>	27.6719...	51.2420...
PSNR	51.2124	51.2124	51.2124
SNRMS	<1x54 double>	0	0
SNMSE	0	0	0
maxPSNR	51.2420	51.2420	51.2420
maxPSNR_x	<94x64 double>	0.1253	1.0022
maxPSNR_R	51	51	51
maxPSNR_tx	[0.6, 2.729, -4.1989, -0.4...	-4.1989	6.2729
maxPSNR_sy	[0.5, 4.883, 0.4143, -3.06...	-3.0683	5.4883
maxPSNR_theta	[0, -0.0956, 0.0618, 0.03...	-0.0956	0.0686

Figura B.14: Parámetros almacenados en la estructura llamada *outopt* al guardar la imagen de AR estimada con el algoritmo 3.2.

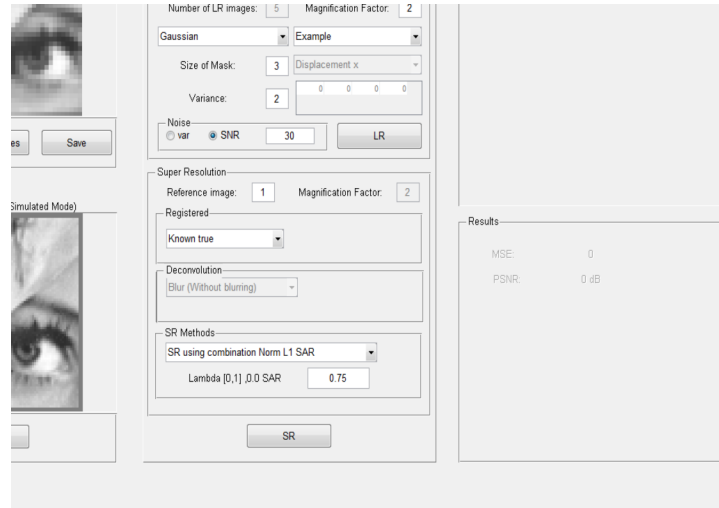


Figura B.15: Valor del coeficiente de mezcla de modelos a priori cuando se selecciona el método 5.1 o 5.2.

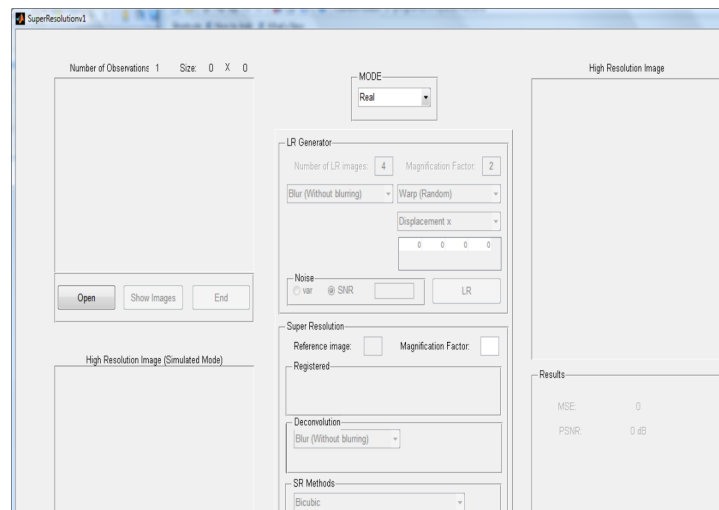


Figura B.16: Modo **Real**.

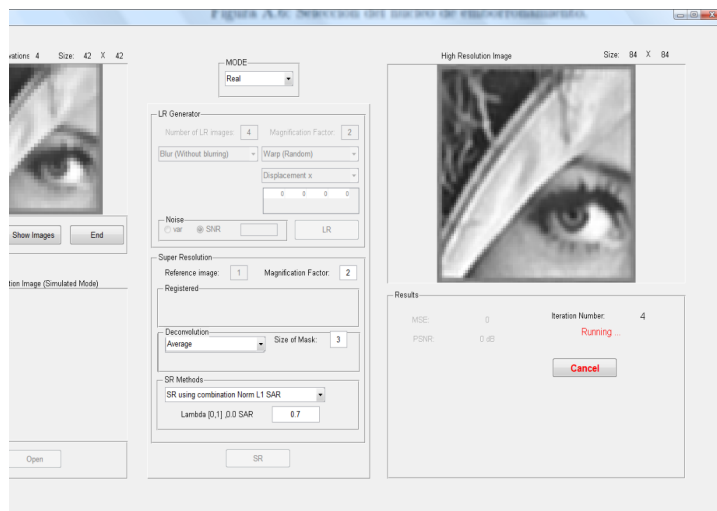


Figura B.17: Ejecución del algoritmo 5.1 en Modo **Real** con $\lambda = 0,7$.

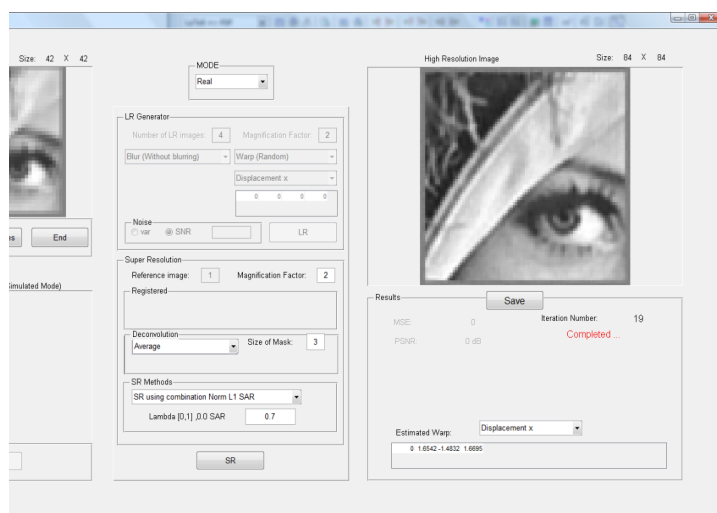


Figura B.18: Terminación de la ejecución del algoritmo 5.1 en Modo **Real** con $\lambda = 0,7$ en la iteración 19.

```

Running SR with optimal distributions
-----

Calculate initial average image
betak =
957.763 1168.29 1152.24 1138.75
alpha_h = 9.32744, alpha_v = 9.47627
-----

Iteration 1
Finished calculating Sigma registration terms
Running FCG to estimate the image
FCG returned the solution at 88 iterations, flag = 1
Estimating the registration
-----
Image 2
Initial registration  sx = 1.65418, sy = -0.843637, theta = 9.43549
Previous registration sx = 1.65418, sy = -0.843637, theta = 9.43549
Estimated registration sx = 1.65418, sy = -0.843637, theta = 9.43549
-----
Image 3
Initial registration  sx = -1.48317, sy = 0.214256, theta = 9.14108
Previous registration sx = -1.48317, sy = 0.214256, theta = 9.14108
Estimated registration sx = -1.48317, sy = 0.214256, theta = 9.14108
-----
Image 4
Initial registration  sx = 1.66946, sy = 1.83849, theta = -0.264915
Previous registration sx = 1.66946, sy = 1.83849, theta = -0.264915
Estimated registration sx = 1.66946, sy = 1.83849, theta = -0.264915
Estimating the hyperparameters
avg DxSigma = 0.00115548, avg DySigma = 0.00115548
k = 1, e = 0.522118, xOx = 0, traceBkSigma = 0.113152, traceOSigma = 0
k = 2, e = 0.410507, xOx = 0, traceBkSigma = 0.0871786, traceOSigma = 0
k = 3, e = 0.401887, xOx = 0, traceBkSigma = 0.0880384, traceOSigma = 0
k = 4, e = 0.391035, xOx = 0, traceBkSigma = 0.0886754, traceOSigma = 0
betak =
2776.77 3544.41 3600.55 3677.22
alpha_h = 4.7704, alpha_v = 4.84304, xconv = 0.0388807
-----

Iteration 2
Finished calculating Sigma registration terms
Running FCG to estimate the image
FCG returned the solution at 81 iterations, flag = 3
Estimating the registration
-----
Image 2
Initial registration  sx = 1.65418, sy = -0.843637, theta = 9.43549
Previous registration sx = 1.65418, sy = -0.843637, theta = 9.43549
Estimated registration sx = 1.65418, sy = -0.843637, theta = 9.43549
-----
Image 3
Initial registration  sx = -1.48317, sy = 0.214256, theta = 9.14108
Previous registration sx = -1.48317, sy = 0.214256, theta = 9.14108
Estimated registration sx = -1.48317, sy = 0.214256, theta = 9.14108
-----
Image 4
Initial registration  sx = 1.66946, sy = 1.83849, theta = -0.264915
Previous registration sx = 1.66946, sy = 1.83849, theta = -0.264915
Estimated registration sx = 1.66946, sy = 1.83849, theta = -0.264915
Estimating the hyperparameters
avg DxSigma = 0.00198266, avg DySigma = 0.00198266
k = 1, e = 0.0576815, xOx = 0, traceBkSigma = 0.189113, traceOSigma = 0
k = 2, e = 0.0497142, xOx = 0, traceBkSigma = 0.145384, traceOSigma = 0
k = 3, e = 0.0431147, xOx = 0, traceBkSigma = 0.145948, traceOSigma = 0
k = 4, e = 0.0365582, xOx = 0, traceBkSigma = 0.146958, traceOSigma = 0
betak =
7147.66 9041.6 9330.24 9612.23
alpha_h = 3.69758, alpha_v = 3.86702, xconv = 0.0361037
-----

```

Figura B.19: Información en el archivo log generada al ejecutar el algoritmo 5.1 en Modo **Real** con $\lambda = 0,7$ en la iteración 2.

Bibliografía

- ABAD, J. *Restauración y reconstrucción bayesianas de imágenes usando composiciones multibanda*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 2003.
- ALAM, M., BOGNAR, J., HARDIE, R. y YASUDA, B. Infrared image registration and high-resolution reconstruction using multiple translationally shifted aliased video frames. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 49(5), páginas 915 –923, 2000. ISSN 0018-9456.
- ANDRIEU, C., DE FREITAS, N., DOUCET, A. y JORDAN, M. I. An introduction to MCMC for machine learning. *Machine Learning*, vol. 50(1-2), páginas 5–43, 2003.
- BABACAN, D., MOLINA, R. y KATSAGGELOS, A. Total variation super resolution using a variational approach. En *IEEE International Conference on Image Processing*, vol. I, páginas 641–644. 2008a.
- BABACAN, S., MOLINA, R. y KATSAGGELOS, A. K. Variational Bayesian blind deconvolution using a total variation prior. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 18, páginas 12 – 26, 2009.
- BABACAN, S. D. *Bayesian Techniques for Image Recovery*. Tesis Doctoral, Northwestern University, Evanston, Illinois, 2009.
- BABACAN, S. D., MOLINA, R. y KATSAGGELOS, A. Variational bayesian super resolution. *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 19(11), páginas 2874–2888, 2010.
- BABACAN, S. D., MOLINA, R. y KATSAGGELOS, A. Variational bayesian super resolution. *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 20(4), páginas 984 – 999, 2011.
- BABACAN, S. D., MOLINA, R. y KATSAGGELOS, A. K. Parameter estimation in TV image restoration using variational distribution approximation. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 17(3), páginas 326–339, 2008b.

- BABACAN, S. D., MOLINA, R. y KATSAGGELOS, A. K. Total variation super resolution using a variational approach. En *IEEE Inter. Conf. on Image Process. 2008*, páginas 641–644. 2008c.
- BAKER, S. y KANADE, T. Limits on super-resolution and how to break them. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 24(9), páginas 1167–1183, 2002.
- BAKER, S. y MATTHEWS, I. Lucas-Kanade 20 years on: A unifying framework: Part 1. *International Journal of Computer Vision*, vol. 56(3), páginas 221–255, 2004.
- BARRETT, R., BERRY, M., CHAN, T. F., DEMMEL, J., DONATO, J., DONGARRA, J., EIJKHOUT, V., POZO, R., ROMINE, C. y DER VORST, H. V. *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, 2nd Edition*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- BEAL, M. *Variational algorithms for approximate Bayesian inference*. Tesis Doctoral, The Gatsby Computational Neuroscience Unit, University College London, 2003.
- BENZI, M. Preconditioning techniques for large linear systems: A survey. *J. Comput. Phys*, vol. 182, páginas 418–477, 2002.
- BIOUCAS-DIAS, J. Bayesian wavelet-based image deconvolution: A GEM algorithm exploiting a class of heavy-tailed priors. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 15(4), páginas 937–951, 2006.
- BIOUCAS-DIAS, J., FIGUEIREDO, M. y OLIVEIRA, J. Total-variation image deconvolution: A majorization-minimization approach. En *ICASSP'2006*. Toulouse, France, 2006.
- BISHOP, C. *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer, 2006.
- BISHOP, T. E., BABACAN, S. D., AMIZIC, B., KATSAGGELOS, A. K., CHAN, T. y MOLINA, R. Blind image deconvolution: problem formulation and existing approaches. En *Blind image deconvolution: theory and applications* (editado por P. Campisi y K. Egiazarian), capítulo 1. CRC press, 2007.
- BORMAN, S. *Topics in Multiframe Superresolution Restoration*. Tesis Doctoral, University of Notre Dame, Notre Dame, IN, 2004.
- BORMAN, S. y STEVENSON, R. Spatial resolution enhancement of low-resolution image sequences. A comprehensive review with directions for future research. Informe técnico, Laboratory for Image and Signal Analysis (LISA), University of Notre Dame, Notre Dame, IN 46556, USA, 1998.

- BOSE, N., CHAN, R. y NG (EDS.), M. Special issue on high-resolution image reconstruction. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, vol. 14(2,3), 2004.
- BOSE, N., KIM, H. y VALENZUELA, H. Recursive implementation of total least squares algorithm for image reconstruction from noisy, undersampled multiframe. En *IEEE International Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing (Minneapolis, MN)*, vol. 5, páginas 269–272. 1993.
- BOUMAN, C. A. y SAUER, K. Generalized Gaussian image model for edge-preserving MAP estimation. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 2(3), páginas 296–310, 1993.
- BREGMAN, L. M. The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 7(3), páginas 200–217, 1967.
- BRETSCHNEIDER, T., BONES, P., MCNEILL, S. y PAIRMAN, D. Image-based quality assessment of SPOT data. En *Proceedings of the American Society for Photogrammetry & Remote Sensing*. 2001. Unpaginated CD-ROM.
- BRONSTEIN, M., BRONSTEIN, A., ZIBULEVSKY, M. y ZEEVI, Y. Blind deconvolution of images using optimal sparse representations. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 14(6), páginas 726–736, 2005.
- BROWN, L. A survey of image registration techniques. *ACM Computing surveys*, vol. 24, páginas 325–376, 1992.
- CANDES, E. J. Compressive sensing. En *Proceedings of International Congress of Mathematicians*, vol. 3, páginas 60–65. 2006.
- CAPEL, D. y ZISSERMAN, A. Super-resolution from multiple views using learnt image models. En *Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, vol. 2, páginas 627–634. 2001.
- CARAMELO, F., ALMEIDA, G., MENDES, L. y FERREIRA, N. Study of an iterative super-resolution algorithm and its feasibility in high-resolution animal imaging with low-resolution spect cameras. En *Nuclear Science Symposium Conference Record, 2007. NSS '07. IEEE*, vol. 6, páginas 4452–4456. 2007. ISSN 1082-3654.
- CHAMBOLLE, A. y LIONS, P.-L. Image recovery via total variation minimization and related problems. *Numerische Mathematik*, vol. 76(2), páginas 167 – 88, 1997. ISSN 0029-599X.

- CHAN, T., ESEDOGLU, S., PARK, F. y YIP, A. Recent developments in total variation image restoration. En *Handbook of Mathematical Models in Computer Vision* (editado por N. Paragios, Y. Chen y O. Faugeras). Springer Verlag, 2005.
- CHAN, T. C. y SHEN, J. *Image Processing And Analysis: Variational, Pde, Wavelet, And Stochastic Methods*. SIAM, 2005.
- CHAN, T. F., NG, M. K., YAU, A. C. y YIP, A. M. Superresolution image reconstruction using fast inpainting algorithms. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 23(1), páginas 3 – 24, 2007. Special Issue on Mathematical Imaging.
- CHANG, H., YEUNG, D.-Y. y XIONG, Y. Super-resolution through neighbor embedding. *Computer Vision and Pattern Recognition, IEEE Computer Society Conference on*, vol. 1, páginas 275–282, 2004.
- CHANTAS, G., GALATSANOS, N., MOLINA, R. y KATSAGGELOS, A. K. Variational bayesian image restoration with a spatially adaptive product of total variation image priors. *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 19(2), páginas 351–362, 2010.
- CHANTAS, G., GALATSANOS, N. P., LIKAS, A. y SAUNDERS, M. Variational bayesian image restoration based on a product of t-distributions image prior. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 17(10), páginas 1795–1805, October 2008.
- CHAUDHURI, S. y MANJUNATH, J. *Motion-free super-resolution*. Springer, 2005.
- CHEESEMAN, P., KANEFSKY, B., KRAFT, R., STUTZ, J. y HANSON, R. Super-resolved surface reconstruction from multiple images. Informe Técnico FIA-94-12, NASA Ames Research Center, Moffett Field CA, CA 94035, USA, 1994.
- CHEESEMAN, P., KANEFSKY, B., KRAFT, R., STUTZ, J. y HANSON, R. Super-resolved surface reconstruction from multiple images. En *Maximum Entropy and Bayesian Methods* (editado por G. Heidbreder), páginas 293–308. Kluwer, the Netherlands, 1996.
- CHEN, K. *Matrix Preconditioning Techniques and Applications (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics)*. Cambridge University Press, 2005.
- CHIANG, M. y BOULT, T. Efficient super-resolution via image warping. *Image and Vision Computing*, vol. 18(10), páginas 761–771, 2000.

- CHIPMAN, B. A. y JEFFS, B. D. Blind multiframe point source image restoration using MAP estimation. *Conference Record of the Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, vol. 2, páginas 1267–1271, 1999.
- CLEMENT, K., G.T.; HYNYNEN. Superresolution ultrasound for imaging and microscopy. En *Ultrasonics Symposium, 2004 IEEE*, vol. 3, páginas 1832 – 1835. 2004.
- CORTIJO, F., VILLENA, S., MOLINA, R. y KATSAGGELOS, A. K. Bayesian superresolution of text image sequences from low-resolution observations. En *IEEE Seventh International Symposium on Signal Processing and Its Applications (ISSPA 2003)*, vol. I, páginas 421–424. 2003.
- CRISTANI, M., CHENG, D. S., MURINO, V. y PANNULLO, D. Distilling information with super-resolution for video surveillance. En *Proceedings of the ACM 2nd international workshop on Video surveillance & sensor networks, VSSN '04*, páginas 2–11. ACM, New York, NY, USA, 2004. ISBN 1-58113-934-9.
- DATSENKO, D. y ELAD, M. Example-based single document image super-resolution: a global map approach with outlier rejection. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, vol. 18, páginas 103–121, 2007.
- DEMPSTER, A. D., LAIRD, N. M. y RUBIN, D. B. Maximum likelihood from incomplete data via the E-M algorithm. *Journal of the Royal statistical Society, Series B*, vol. 39, páginas 1–37, 1977.
- DERIN, H. y ELLIOTT, H. Modelling and segmentation of noisy and textured images using Gibbs random fields. vol. PAMI-9(1), páginas 39–55, 1987.
- DONHO, D. L. Compressed sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52(4), páginas 1289–1306, 2006.
- D.P.CAPEL. *Image Mosaicing and Super-resolution*. Tesis Doctoral, University of Oxford, 2001.
- EFROS, A. y LEUNG, T. Texture synthesis by non-parametric sampling. En *Computer Vision, 1999. The Proceedings of the Seventh IEEE International Conference on*, vol. 2, páginas 1033 –1038 vol.2. 1999.
- ELAD, M. y DATSENKO, D. Example-based regularization deployed to super-resolution reconstruction of a single image. *Comput. J.*, vol. 52(1), páginas 15–30, 2009.
- ELAD, M. y FEUER, A. Restoration of a single superresolution image from several blurred, noisy, and undersampled measured images. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 6, páginas 1646–1658, 1997.

- ELAD, M. y FEUER, A. Super-resolution restoration of continuous image sequence — adaptative filtering approach. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 8, páginas 387–395, 1999.
- ELAD, M. y HEL-OR, Y. A fast super-resolution reconstruction algorithm for pure translational motion and common space invariant blur. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 10, páginas 1187–1193, 2001.
- F. TSUMURAYA, N. M. y BABA, N. Iterative blind deconvolution method using Lucy’s algorithm. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 282(2), páginas 699–708, 1994.
- FARSIU, S. *MDSP resolution enhancement software*. University of California at Santa Cruz, 2004.
- FARSIU, S., ROBINSON, D., ELAD, M. y MILANFAR, P. Robust shift and add approach to super-resolution. En *Proceedings of SPIE: Applications of Digital Image Processing XXVI*, vol. 5203, páginas 121–130. 2003.
- FARSIU, S., ROBINSON, D., ROBINSON, D., ELAD, M., ELAD, M., MILANFAR, P. y MILANFAR, P. Advances and challenges in super-resolution. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, vol. 14, páginas 47–57, 2004.
- FARSIU, S., ROBINSON, M. D., ELAD, M. y MILANFAR, P. Fast and robust multiframe super resolution. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 13(10), páginas 1327–1344, Oct. 2004.
- FRANSENS, R., STRECHA, C. y VAN GOOL, L. Optical flow based super-resolution: A probabilistic approach. *Comput. Vis. Image Underst.*, vol. 106, páginas 106–115, 2007. ISSN 1077-3142.
- FREEMAN, W., JONES, T. y PASZTOR, E. Example based super-resolution. *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 22, páginas 56–65, 2002.
- GEMAN, S. y GEMAN, D. Stochastic Relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images. vol. PAMI-6(6), páginas 721–741, 1984.
- GEORGIEV, T. New results on the plenoptic 2.0 camera. En *Conference on Signals, Systems and Computers, 2009 Conference Record of the Forty-Third Asilomar*, páginas 1243 – 1247. 2009.
- GIBSON, F. S. y LANNI, F. Experimental test of an analytical model of aberration in an oil-immersion objective lens used in three-dimensional light microscopy. *Journal of the Optical society of America-A*, vol. 8, páginas 1601–1613, 1991.

- GUBIN, L. G., POLYAK, B. T. y RAIK, E. V. The method of projections for finding the common point of convex sets. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 7(6), páginas 1–24, 1967.
- GUNTURK, B., BATUR, A., ALTUNBASAK, Y., HAYES, M. y MERSEREAU, R. Eigenface-domain super-resolution for face recognition. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 12, páginas 597–606, 2003.
- HADAMARD, J. *Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press, New Haven, CT, 1923.
- HARDIE, R., BARNARD, K. y ARMSTRONG, E. Joint MAP registration and high-resolution image estimation using a sequence of undersampled images. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 6(12), páginas 1621–1633, 1997.
- HARDIE, R., BARNARD, K., BOGNAR, J., ARMSTRONG, E. y WATSON, E. High resolution image reconstruction from a sequence of rotated and translated frames and its application to an infrared imaging system. *Optical Engineering*, vol. 73, páginas 247–260, 1998.
- HE, H. y KONDI, L. An image super-resolution algorithm for different error levels per frame. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 15(3), páginas 592–603, 2006.
- HE, Y., YAP, K. H., CHEN, L. y CHAU, L. P. A nonlinear least square technique for simultaneous image registration and super-resolution. *IEEE Transaction on Image Processing*, (11), páginas 2830–2841, 2007.
- HENNINGS-YEOMANS, P., BAKER, S. y KUMAR, B. Simultaneous super-resolution and feature extraction for recognition of low-resolution faces. En *Computer Vision and Pattern Recognition, 2008. CVPR 2008. IEEE Conference on*, páginas 1–8. 2008.
- HERTZMANN, A., JACOBS, C. E., OLIVER, N., CURLESS, B. y SALESIN, D. H. Image analogies. En *Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, SIGGRAPH '01*. 2001.
- HINTON, G. Training products of experts by minimizing contrastive divergence. *Neural Computation*, vol. 14(8), páginas 1771–1800, 2002.
- HINTON, G. E. Products of experts. En *Proc. of the Int'l Conf. on Artificial Neural Networks, Edinburgh, GB*, vol. 1, páginas 1–6. 1999.
- HUNT, B. R. y SEMENTILLI, P. J. Description of a poisson imagery super-resolution algorithm. En *Astronomical Data Analysis Software and Systems I* (editado por D. M. Worrall, C. Biemserfer y J. Barnes), páginas 196–199. Astronomical Society of the Pacific, San Francisco, USA, 1992.

- JIA, K. y GONG, S. Multi-modal tensor face for simultaneous super-resolution and recognition. En *Computer Vision, 2005. ICCV 2005. Tenth IEEE International Conference on*, vol. 2, páginas 1683–1690 Vol. 2. 2005.
- JIA, K. y GONG, S. Generalized face super-resolution. *Image Processing, IEEE Transactions on*, vol. 17(6), páginas 873–886, 2008.
- JOLLIFFE, I. T. *Principal component analysis*. Springer, 2002.
- KANEMURA, A., MAEDA, S.-I. y ISHII, S. Superresolution with compound Markov random fields via the variational EM algorithm. *Neural Networks*, vol. 22(7), páginas 1025–1034, 2009.
- KANG, M. y CHAUDHURI (EDS.), S. Super-resolution image reconstruction. *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 20(3), 2003.
- KATSAGGELOS, A. K. A multiple input image restoration approach. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, vol. 1, páginas 93–103, 1990.
- KATSAGGELOS, A. K., LAY, K. y GALATSANOS, N. A general framework for frequency domain multi-channel signal processing. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 2, páginas 417–420, 1993.
- KATSAGGELOS, A. K. y MOLINA, R., editores. *Super resolution (special issue)*. The Computer Journal, 52, 395-396, 2009.
- KATSAGGELOS, A. K., MOLINA, R. y MATEOS, J. *Super Resolution of Images and Video*. Morgan and Claypool, 2007.
- KENNEDY, J. A., ISRAEL, O., FRENKEL, A., BAR-SHALOM, R. y AZHARI, H. Super-resolution in PET imaging. *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol. 25(2), páginas 137–147, 2006.
- KEREN, D., PELEG, S. y BRADA, R. Image sequence enhancement using sub-pixel displacement. En *Proceedings IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, páginas 742–746. 1988.
- KIM, S., BOSE, N.-K. y VALENZUELA, H. Recursive reconstruction of high resolution image from noisy undersampled multiframe. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 38, páginas 1013–1027, 1990.
- KIM, S. y SU, W. Recursive high-resolution reconstruction of blurred multiframe images. *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 2, páginas 534–539, 1993.

- KOLOTILINA, L. y YEREMIN, A. Factorized sparse approximate inverse preconditioning: I. theory. *SIAM Journal of Matrix Analysis and its Applications*, vol. 14, páginas 45–58, 1993.
- KRIST, J. Simulation of HST PSFs using Tiny Tim. En *Astronomical Data Analysis Software and Systems IV* (editado por R. A. Shaw, H. E. Payne y J. J. E. Hayes), páginas 349–353. Astronomical Society of the Pacific, San Francisco, USA, 1995.
- KULLBACK, S. *Information Theory and Statistics*. New York, Dover Publications, 1959.
- KULLBACK, S. y LEIBLER, R. A. On information and sufficiency. *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 22, páginas 79–86, 1951.
- LAGENDIJK, R. L. y BIEMOND, J. Block-adaptive image identification and restoration. *Proceedings ICASSP, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 4, páginas 2497–2500, 1991.
- LANCZOS, C. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, vol. 45, páginas 255–282, 1950.
- LANCZOS, C. Solution of linear equations by minimized iterations. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, vol. 49, páginas 33–53, 1952.
- LEE, E. S. y KANG, M. G. Regularized adaptive high-resolution image reconstruction considering inaccurate subpixel registration. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 12(7), páginas 826–837, 2003.
- LERTRATTANAPANICH, S. y BOSE, N. High resolution image formation from low resolution frames using delaunay triangulation. *Image Processing, IEEE Transactions on*, vol. 11(12), páginas 1427 – 1441, 2002.
- LI, F., JIA, X. y FRASER, D. Universal hmt based super resolution for remote sensing images. En *proceedings of the International Conference on Image Processing, ICIP 2008, October 12-15, 2008, San Diego, California, USA*, páginas 333–336. 2008.
- LI, S. Z. *Markov Random Field Modeling in Image Analysis*. Springer Publishing Company, Incorporated, 3rd edición, 2009.
- LIKAS, A. y GALATSANOS, N. A variational approach for Bayesian blind image deconvolution. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52(8), páginas 2222–2233, 2004.

- LIU, C., SHUM, H.-Y. y FREEMAN, W. T. Face hallucination: Theory and practice. *International Journal of Computer Vision*, vol. 75(1), páginas 115–134, 2007.
- LIU, C., SHUM, H.-Y. y ZHANG, C. A two-step approach to hallucinating faces: Global parametric model and local nonparametric model. En *2001 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2001), with CD-ROM, 8-14 December 2001, Kauai, HI, USA*, páginas 192–198. 2001.
- LOPEZ, A., MOLINA, R., KATSAGGELOS, A. K., RODRIGUEZ, A., LÓPEZ, J. y LLAMAS, J. Parameter estimation in bayesian reconstruction of spect images: An aide in nuclear medicine diagnosis. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, vol. 14(1), páginas 21–27, 2004.
- LUCAS, B. y KANADE, T. An iterative image registration technique with an application to stereo vision. En *Proceedings of Imaging Understanding Workshop*, páginas 121–130. 1981.
- MALCZEWSKI, K. y STASINSKI, R. Toeplitz-based iterative image fusion scheme for MRI. En *Proceedings of the International Conference on Image Processing, ICIP 2008, October 12-15, 2008, San Diego, California, USA*, páginas 341–344. 2008.
- MATEOS, J., KATSAGGELOS, A. K. y MOLINA, R. Simultaneous motion estimation and resolution enhancement of compressed low resolution video. En *IEEE International Conference on Image Processing*, vol. 2, páginas 653–656. 2000.
- MATEOS, J., MOLINA, R. y KATSAGGELOS, A. K. Approximations of posterior distributions in blind deconvolution using variational methods. En *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP 2005)*, vol. II, páginas 770–773. Genova (Italy), 2005.
- MICHAILOVICH, O. y ADAM, D. A novel approach to the 2-D blind deconvolution problem in medical ultrasound. vol. 24(1), páginas 86–104, 2005.
- MILANFAR, P. *Super-Resolution Imaging*. Digital Imaging and Computer Vision. Taylor&Francis/CRC Press (Ed.), 2010.
- MISKIN, J. *Ensemble Learning for Independent Component Analysis*. Tesis Doctoral, Astrophysics Group, University of Cambridge, 2000.
- MOLINA, R. On the hierarchical Bayesian approach to image restoration. Applications to Astronomical images. vol. 16(11), páginas 1122–1128, 1994.

- MOLINA, R., KATSAGGELOS, A. K. y MATEOS, J. Bayesian and regularization methods for hyperparameter estimation in image restoration. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 8(2), páginas 231–246, 1999.
- MOLINA, R., MATEOS, J. y KATSAGGELOS, A. K. Blind deconvolution using a variational approach to parameter, image, and blur estimation. *IEEE Transaction on Image Processing*, 2006.
- MOLINA, R., NÚÑEZ, J., CORTIJO, F. J. y MATEOS, J. Image restoration in Astronomy. A Bayesian perspective. vol. 18(2), páginas 11–29, 2001.
- MOLINA, R., VEGA, M., ABAD, J. y KATSAGGELOS, A. K. Parameter estimation in Bayesian high-resolution image reconstruction with multisensors. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 12(12), páginas 1655–1667, 2003a.
- MOLINA, R., VEGA, M., ABAD, J. y KATSAGGELOS, A. K. Parameter estimation in bayesian high-resolution image reconstruction with multisensors. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 12(12), páginas 1655–1667, 2003b.
- NEAL, R. M. Probabilistic inference using Markov chain Monte Carlo methods. Informe Técnico CRG-TR-93-1, Dept. of Computer Science, University of Toronto, University of Toronto, 1993. Available online at <http://www.cs.toronto.edu/~radford/res-mcmc.html>.
- NG, M., CHAN, T., KANG, M. y MILANFAR, P. Super-resolution imaging: Analysis, algorithms, and applications. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, vol. 2006, páginas Article ID 90531, 2 pages, 2006.
- NG, M., KOO, J. y BOSE, N. Constrained total least-squares computations for high-resolution image reconstruction with multisensors. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, vol. 12(1), páginas 35–42, 2002.
- NG, M. K., SHEN, H., LAM, E. Y. y ZHANG, L. A total variation regularization based super-resolution reconstruction algorithm for digital video. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, (74585), 2007.
- NGUYEN, N. y MILANFAR, P. An efficient wavelet-based algorithm for image superresolution. En *Image Processing, 2000. Proceedings. 2000 International Conference on*, vol. 2, páginas 351–354 vol.2. 2000.
- NGUYEN, N., MILANFAR, P. y GOLUB, G. Blind superresolution with generalized cross-validation using Gauss-type quadrature rules. En *33rd Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, vol. 2, páginas 1257–1261. 1999.

- NISENSEN, P. y BARAKAT, R. Partial atmospheric correction with adaptive optics. *Journal of the Optical society of America-A*, vol. 4, páginas 2249–2253, 1991.
- PAPOULIS, A. Generalized sampling expansion. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, vol. 24, páginas 652–654, 1977.
- PARK, S., PARK, M. y KANG, M. Super-resolution image reconstruction: A technical overview. *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 20, páginas 21–36, 2003.
- PATTI, A. y ALTUNBASAK, Y. Artifact reduction for set theoretic super-resolution with edge adaptive constraints and higher-order interpolants. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 10, páginas 179–186, 2001.
- PATTI, A., SEZAN, M. y TEKALP, A. Robust methods for high-quality stills from interlaced video in the presence of dominant motion. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, vol. 7, páginas 328–342, 1997.
- PELEG, M. I. S. Super resolution from image sequences. *International Conference on Pattern Recognition*, vol. 2, páginas 115–120, 1990.
- PHAM, T. Q., VLIET, L. J. V. y SCHUTTE, K. Robust fusion of irregularly sampled data using adaptive normalized convolution. En *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, página 2006. 2006.
- PICKUP, L., ROBERTS, S. y ZISSERMAN, A. A sampled texture prior for image super-resolution. En *Advances in Neural Information Processing Systems*, páginas 1587–1594. 2003.
- PICKUP, L. C., CAPEL, D. P., ROBERTS, S. J. y ZISSERMAN, A. Bayesian methods for image super-resolution. *The Computer Journal*, vol. 52(1), páginas 101–113, 2007.
- PICKUP, L. C., CAPEL, D. P., ROBERTS, S. J. y ZISSERMAN, A. Bayesian methods for image super-resolution. *Comput. J.*, vol. 52(1), páginas 101–113, 2009.
- PROTTER, M. y ELAD, M. Super resolution with probabilistic motion estimation. *IEEE Trans Image Process*, vol. 18(8), páginas 1899–904, 2009.
- PROTTER, M., ELAD, M., TAKEDA, H. y MILANFAR, P. Generalizing the nonlocal-means to super-resolution reconstruction. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 18(1), páginas 36–51, 2009.
- RHEE, S. y KANG, M. G. Discrete cosine transform based regularized high-resolution image reconstruction algorithm. *Optical Engineering*, vol. 38, páginas 1348–1356, 1999.

- RIPLEY, B. D. *Spatial Statistics*. John Wiley, 1981.
- ROGGEMANN, M. Limited degree-of-freedom adaptive optics and image reconstruction. *Applied Optics*, vol. 30, páginas 4227–4233, 1991.
- ROTH, S. y BLACK, M. J. Fields of experts: A framework for learning image priors. En *In CVPR*, páginas 860–867. 2005.
- RUANAIDH, J. O. y FITZGERALD, W. *Numerical Bayesian Methods Applied to Signal Processing*. Springer Series in Statistics and Computing. Springer, New York, 1st edición, 1996. ISBN 0-387-94629-2.
- RUDIN, L. I., OSHER, S. y FATEMI, E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, páginas 259–268, 1992.
- SAAD, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems, Second Edition*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- SARDER, P. y NEHORAI, A. Deconvolution methods for 3D fluorescence microscopy images: an overview. vol. 23, páginas 32–45, 2006.
- SCHULTZ, R. y STEVENSON, R. Improved definition image expansion. *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on*, vol. 3, páginas 173–176, 1992.
- SCHULTZ, R. y STEVENSON, R. A bayesian approach to image expansion for improved definition. *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 3(3), página 233242, 1994.
- SCHULTZ, R. y STEVENSON, R. Extraction of high resolution frames from video sequences. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 5, páginas 996–1011, 1996.
- SCHULTZ, T. J. Multiframe blind deconvolution of astronomical images. *Journal of the Optical society of America-A*, vol. 10, páginas 1064–1073, 1993.
- SEGALL, C., MOLINA, R., KATSAGGELOS, A. K. y MATEOS, J. Bayesian resolution enhancement of compressed video. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 13(7), páginas 898–911, 2004.
- SEGALL, C. A., MOLINA, R. y KATSAGGELOS, A. K. High-resolution images from low-resolution compressed video. vol. 20(3), páginas 37–48, 2003.
- ŠROUBEK, F. y FLUSSER, J. Multichannel blind deconvolution of spatially misaligned images. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 7, páginas 45–53, 2005.

- STARK, H. y OSKOU, P. High resolution image recovery from image-plane arrays, using convex projections. *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 6, páginas 1715–1726, 1989.
- SU, W. y KIM, S. P. High-resolution restoration of dynamic image sequences. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, vol. 5(4), páginas 330–339, 1994.
- SUN, D. y CHAM, W.-K. Postprocessing of low bit-rate block dct coded images based on a fields of experts prior. *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 16(11), páginas 2743–2751, 2007.
- SUN, J., NING ZHENG, N., TAO, H. y YEUNG SHUM, H. Image hallucination with primal sketch priors. En *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, páginas 729–736. 2003.
- TAKEDA, H., FARSIU, S. y MILANFAR, P. Kernel regression for image processing and reconstruction. *Image Processing, IEEE Transactions on*, vol. 16(2), páginas 349 –366, 2007.
- TAXT, R., T.; JIRIK. Superresolution of ultrasound images using the first and second harmonic signal. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 51, páginas 163 – 175, 2004.
- TEKALP, A., OZKAN, M. y SEZAN, M. High-resolution image reconstruction from lower-resolution image sequences and space varying image restoration. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 3, páginas 169–172. 1992.
- TENENBAUM, J. B., DE SILVA, V. y LANGFORD, J. C. A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction. *Science*, vol. 290(5500), páginas 2319–2323, 2000.
- TIAN, J. y MA, K.-K. Stochastic super-resolution image reconstruction. *J. Visual Communication and Image Representation*, vol. 21(3), páginas 232–244, 2010.
- TIPPING, M. y BISHOP, C. Bayesian image super-resolution. En *Advances in Neural Information Processing Systems 15* (editado por S. Thrun, S. Becker y K. Obermayer), páginas 1279–1286. MIT Press, Cambridge, MA, 2003.
- TOM, B. y KATSAGGELOS, A. K. Reconstruction of a high-resolution image by simultaneous registration, restoration, and interpolation of low-resolution images". En *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*, vol. 2, páginas 539–542. 1995.

- TOM, B. y KATSAGGELOS, A. K. Resolution enhancement of monochrome and color video using motion compensation. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 10, páginas 278–287, 2001.
- TOM, B., KATSAGGELOS, A. K. y GALATSANOS, N. Reconstruction of a high-resolution image from registration and restoration of low-resolution images. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*, vol. 3, páginas 553–557. 1994.
- TSAI, R. y HUANG, T. Multiframe image restoration and registration. *Advances in Computer Vision and Image Processing*, vol. 1, páginas 317–339, 1984.
- TURK, M. A. y PENTLAND, A. P. Face recognition using eigenfaces. En *Proceedings. 1991 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, páginas 586–591. IEEE Comput. Soc. Press, 1991. ISBN 0-8186-2148-6.
- TYCHONOFF, A. N. y ARSENIN, Y. *Solution of Ill-posed Problems*. Winston and Sons, Washington, 1977.
- UR, H. y GROSS, D. Improved resolution from subpixel shifted pictures. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, vol. 54, páginas 181–186, 1992.
- VANDEWALLE, P. *Super-resolution from unregistered aliased images*. Tesis Doctoral, Lausanne, 2006.
- VANDEWALLE, P., SBAIZ, L., VANDEWALLE, J. y VETTERLI, M. Super-Resolution from Unregistered and Totally Aliased Signals Using Subspace Methods. vol. 55(7, Part 2), páginas 3687–3703, 2007.
- VANDEWALLE, P., SÜSTRUNK, S. y VETTERLI, M. A frequency domain approach to registration of aliased images with application to super-resolution. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, vol. 2006, páginas Article ID 71459, 14 pages, 2006.
- VEGA, M., MATEOS, J., MOLINA, R. y KATSAGGELOS, A. Super-resolution of multispectral images. *The Computer Journal* doi:10.1093/comjnl/bxn031, vol. 52(1), páginas 153–167, 2009a.
- VEGA, M., MOLINA, R. y KATSAGGELOS, A. L1 prior majorization in bayesian image restoration. En *16th International Conference on Digital Signal Processing (DSP 2009)* (editado por IEEE), páginas 1–6. Santorini (Greece), 2009b.
- VILLENA, S., ABAD, J., MOLINA, R. y KATSAGGELOS, A. Estimation of high resolution images and registration parameters from low resolution

- observations. En *Progress in Pattern Recognition, Image Analysis and Applications, 9th Iberoamerican Congress on Pattern Recognition, CIARP 2004* (editado por A. Sanfeliu y J. C. O. J.F. Martínez Trinidad), vol. LNCS 3287, Ed. Springer-Verlag, páginas 509–516. Puebla (Mexico), 2004.
- VILLENA, S., VEGA, M., BABACAN, D., MOLINA, R. y KATSAGGELOS, A. Using the kullback-leibler divergence to combine image priors in super-resolution image reconstruction. En *IEEE International Conference on Image Processing*, páginas 893–896. Hong-Kong (China), 2010a.
- VILLENA, S., VEGA, M., BABACAN, D., MOLINA, R. y KATSAGGELOS, A. Bayesian combination of sparse and non sparse priors in image superresolution. *Trabajo en preparación*, 2011.
- VILLENA, S., VEGA, M., BABACAN, S., MOLINA, R. y KATSAGGELOS, A. Image prior combination in super resolution image registration & reconstruction. En *IEEE Workshop on Machine Learning for Signal Processing*, páginas 355–360. Kittilä (Finland), 2010b.
- VILLENA, S., VEGA, M., MOLINA, R. y KATSAGGELOS, A. K. Bayesian super-resolution image reconstruction using an l1 prior. En *6th International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA 2009) Best paper award, Image Processing and Analysis Track*, páginas 152–157. 2009a.
- VILLENA, S., VEGA, M., MOLINA, R. y KATSAGGELOS, A. K. Parameter estimation in bayesian super-resolution image reconstruction from low resolution rotated and translated images. En *11th International Conference, ACIVS 2009* (editado por S. B. . Heidelberg), vol. 5807/2009, páginas 188–199. Bordeaux (France), 2009b.
- VILLENA, S., VEGA, M., MOLINA, R. y KATSAGGELOS, A. K. Image prior combination in super-resolution image reconstruction. En *European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2010)*, páginas 616–620. Aalborg (Denmark), 2010c.
- WANG, Q., TANG, X. y SHUM, H. Patch based blind image super resolution. En *Proc. IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, vol. 1, páginas 709–716. 2005.
- WANG, X. y TANG, X. Hallucinating face by eigentransformation. *Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, IEEE Transactions on*, vol. 35(3), páginas 425–434, 2005. ISSN 1094-6977.
- WEICKERT, J. A review of nonlinear diffusion filtering. En *SCALE-SPACE '97: Proceedings of the First International Conference on Scale-Space Theory in Computer Vision*, páginas 3–28. Springer-Verlag, London, UK, 1997.

- WONG, J., A.; SCHARCANSKI. Phase-adaptive superresolution of mammographic images using complex wavelets. *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 18, páginas 1140 – 1146, 2009.
- WOODS, N., GALATSANOS, N. y KATSAGGELOS, A. K. Stochastic methods for joint registration, restoration, and interpolation of multiple undersampled images. *IEEE Trans. Image Process*, vol. 15, páginas 201–213, 2006.
- YANG, J., TANG, H., MA, Y. y HUANG, T. Face hallucination via sparse coding. En *Image Processing, 2008. ICIP 2008. 15th IEEE International Conference on*, páginas 1264 –1267. 2008a.
- YANG, J., WRIGHT, J., HUANG, T. y MA, Y. Image super-resolution as sparse representation of raw image patches. En *Computer Vision and Pattern Recognition, 2008. CVPR 2008. IEEE Conference on*, páginas 1 –8. 2008b. ISSN 1063-6919.
- YANG, J., WRIGHT, J., HUANG, T. y MA, Y. Image super-resolution via sparse representation. *Image Processing, IEEE Transactions on*, vol. 19(11), páginas 2861 –2873, 2010.
- YEDIDIA, J. S., FREEMAN, W. T. y WEISS, Y. Generalized belief propagation. En *Proceedings of Advances in Neural Information Processing Systems*, vol. 13, páginas 689–695. MIT Press, 2000.
- YEN, L. J. On non-uniform sampling of bandwidth limited signal. *IRE Transactions on Circuits Theory*, vol. 3(4), páginas 251–257, 1956.
- YOU, Y. L. y KAVEH, M. Blind image restoration by anisotropic regularization. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 8(3), páginas 396–407, 1999.
- ZHANG, J. The mean field theory in EM procedures for blind Markov random field image restoration. *IEEE Transaction on Image Processing*, vol. 2(1), páginas 27–40, 1993.
- ZHANG, Q., GUY, R. y PLEMMONS, R. Matrix structures and parallel algorithms for image superresolution reconstruction. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 31(4), páginas 1873–1893, 2010.
- ZITOVA, B. y FLUSSER, J. Image registration methods: a survey. *Image and Vision Computing*, vol. 21(11), páginas 977–1000, 2003.
- ZOMET, A., RAV-ACHA, A. y PELEG, S. Robust super-resolution. En *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2001)*, páginas 645–650. 2001.

*–¿Qué te parece desto, Sancho? – Dijo Don Quijote –
Bien podrán los encantadores quitarme la ventura,
pero el esfuerzo y el ánimo, será imposible.*

*Segunda parte del Ingenioso Caballero
Don Quijote de la Mancha
Miguel de Cervantes*

*–Buena está – dijo Sancho –; fírmela vuestra merced.
–No es menester firmarla – dijo Don Quijote–,
sino solamente poner mi rúbrica.*

*Primera parte del Ingenioso Caballero
Don Quijote de la Mancha
Miguel de Cervantes*

