

# Restauración de imágenes digitales

Rafael Molina<sup>a</sup>, Aggelos K. Katsaggelos<sup>b</sup>, Javier Mateos<sup>a</sup>, Javier Abad<sup>a</sup> y Francisco J. Cortijo<sup>a 1</sup>

a) Departamento de Ciencias de la Computación e I.A. Universidad de Granada. 18071 Granada, España.

b) Department of Electrical and Computer Engineering, Northwestern University, Evanston, Illinois 60208-3118.

## 1 Introducción

El campo de la restauración de imágenes comenzó principalmente con los trabajos de los científicos involucrados en los programas espaciales de los Estados Unidos y la antigua Unión Soviética en los años 50 y comienzos de los 60 [1]. Las imágenes que se obtuvieron de las diferentes misiones espaciales de esa época (Ranger, Mariner, etc.) estaban sujetas a degradaciones de muy diversos tipos, entre ellas las vibraciones de los equipos o la incapacidad de los astronautas para mantenerse quietos mientras tomaban las fotografías en un ambiente sin gravedad. La pérdida de información debida a la mala calidad de las imágenes tomadas fue devastadora; se ha estimado que las 22 imágenes tomadas durante el vuelo del Mariner IV a Marte en 1964 costaron 10 millones de dólares, sólo en función del número de bits transmitidos [1].

El objetivo de este trabajo es introducir el campo de la restauración de imágenes digitales a aquellos lectores interesados en el tema, proporcionando una pequeña clasificación de las técnicas y los problemas relacionados con ella.

La perspectiva de campo que daremos en este trabajo intentará combinar lo que se ha venido en llamar la aproximación basada en el campo del procesamiento de la señal (*la aproximación de los ingenieros*) y la aproximación basada en modelos estadísticos, en particular en los Campos Aleatorios de Markov (la llamada *aproximación bayesiana o estadística*). Veremos que, en el fondo, no son más que dos perfiles de un mismo problema, cuya visualización conjunta nos proporciona una imagen más nítida del campo de la restauración.

En las siguientes secciones comenzaremos planteando formalmente el problema de la restauración de imágenes para, posteriormente, abordar la búsqueda de soluciones a nuestro problema. A continuación describiremos algunos campos donde la restauración de imágenes ha sido aplicada con éxito. Por último, terminaremos comentando algunos problemas asociados a la restauración de imágenes que no han sido abordados en este trabajo.

## 2 El problema de la restauración de imágenes

El modelo general discreto para una degradación lineal de una imagen debida a emborronamiento y ruido viene dada por [6]

$$\mathbf{g} = \mathbf{D}\mathbf{f} + \mathbf{w}, \quad (1)$$

donde los vectores de tamaño  $p \times 1$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{w}$  representan, respectivamente, la imagen original, la imagen borrosa con ruido y el ruido que se supone habitualmente de tipo normal, independiente y con media cero, pudiendo ser su varianza conocida o desconocida (lo que supone un problema adicional),  $\mathbf{D}$  representa la matriz de emborronamiento, que conoceremos o no (otro problema adicional). Las imágenes se suponen de tamaño  $m \times n$ , con  $p = m \times n$ .

La restauración de imágenes trata de encontrar un estimador de la imagen original,  $\mathbf{f}$ , dadas  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{D}$  y alguna información sobre  $\mathbf{w}$  y, posiblemente, sobre  $\mathbf{f}$  (ver el capítulo 1 de [6] para una clasificación de los métodos de restauración).

Si reescribimos la ecuación (1) en función de los elementos de las matrices involucradas tendremos

$$g(i, j) = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N d(i, j; k, l) f(k, l) + w(i, j), \quad (2)$$

donde el término  $d(i, j; k, l)$  representa la función de emborronamiento bidimensional del sistema de captación de imágenes, que se suele llamar *psf* (del inglés *point spread function*), que en general no es invariante por traslaciones. Sin embargo, debido a los problemas asociados a la restauración con una *psf* que no es estacionaria, se utiliza la hipótesis de que  $d(i, j; k, l)$  es invariante por traslaciones, teniendo entonces ésta la forma  $d(i-k, j-l)$ .

La figura 1 muestra la imagen original y la observación correspondiente obtenida por un proceso de degradación por movimiento de la cámara y ruido normal.

Veamos ahora cómo recuperar la imagen original a partir de la observada.

---

<sup>1</sup>Este trabajo ha sido financiado por la "Comisión Nacional de Ciencia y Tecnología" bajo contrato TIC97-0989.

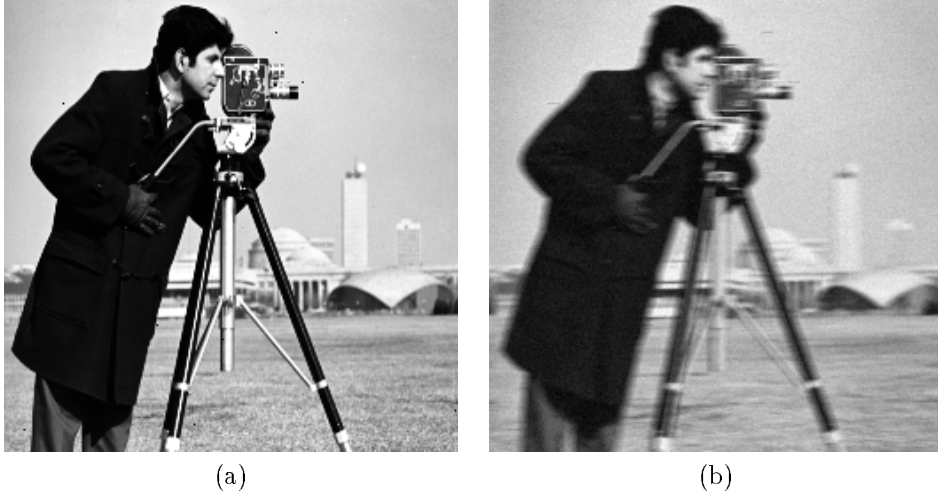


Figura 1: (a) Imagen original. (b) Imagen observada.

### 3 Técnicas de restauración de imágenes

La primera aproximación en la que uno puede pensar para resolver el problema de la restauración de imágenes es aplicar lo que se llama dentro del procesamiento de la señal *Filtro Inverso*, es decir, seleccionar  $\hat{\mathbf{f}}$ , la estimación de la imagen original, como

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{g} - \mathbf{D}\mathbf{f}\|^2. \quad (3)$$

Observemos que esta aproximación coincide, en cuanto a la solución, con la estimación por mínimos cuadrados o también de máxima verosimilitud para una distribución normal, ya que el estimador verifica

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \left\{ \max_{\mathbf{f}} p(\mathbf{g} | \mathbf{f}) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_r^2} \|\mathbf{g} - \mathbf{D}\mathbf{f}\|^2 \right] \right\}, \quad (4)$$

donde  $\sigma_r^2$  es la varianza del ruido. Observemos que las soluciones de las ecuaciones (3) y (4) satisfacen

$$\mathbf{D}^t \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{D}^t \mathbf{D} \mathbf{g}. \quad (5)$$

Sin embargo, esta aproximación no conduce a buenas soluciones por diferentes motivos. Uno de ellos lo constituyen las características de la matriz  $\mathbf{D}$  y otro, el hecho de que, incluso si la matriz  $\mathbf{D}$  fuese la identidad,  $\mathbf{g}$  tendría un ruido que nos gustaría eliminar. Seguiremos analizando esta idea en los párrafos siguientes, pero antes veamos otra aproximación al problema.

Podemos ver el problema de la restauración desde otro punto de vista. Podemos considerar que buscamos una estimación de la imagen original,  $\hat{\mathbf{f}}$ , que sea una combinación lineal de las observaciones, es decir, que sea de la forma  $\hat{\mathbf{A}}\mathbf{g}$ , siendo  $\hat{\mathbf{A}}$  una matriz de orden  $p \times p$ , que cumpla

$$\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{g} = \arg \min_{\hat{\mathbf{A}}} E [\|\hat{\mathbf{f}} - \mathbf{g}\|^2 | \mathbf{g}]. \quad (6)$$

Esta formulación requiere conocer la matriz de covarianzas de  $\mathbf{f}$ , que notaremos por  $R_{ff}$ , y la matriz de covarianzas del ruido, que notaremos por  $R_{nn}$ . Entonces, el estimador verifica

$$\hat{\mathbf{f}} = R_{ff}(\mathbf{D}R_{ff}\mathbf{D}^t + R_{nn})^{-1}\mathbf{g}. \quad (7)$$

Éste es el famoso filtro de Wiener cuya historia se remonta a comienzos de la II Guerra Mundial. En esta época Wiener trabajaba en un proyecto militar para diseñar un controlador que dirigiera el fuego antiaéreo a partir de información proporcionada por el radar. Puesto que la velocidad de un avión no es despreciable en relación a la de los proyectiles, el sistema tenía que disparar hacia adelante, es decir, el controlador tenía que predecir el movimiento del objetivo utilizando la información ruidosa proporcionada por el radar. Wiener encontró la solución para el menor error cuadrático medio en función de la correlación. El trabajo de Wiener no fue desclasificado hasta finales de los años cuarenta.

Como ya hemos comentado, las soluciones de las ecuaciones (3) y (4) no producen buenos resultados. Es por tanto necesario introducir algunas condiciones que limiten las características de la solución al problema de restauración.

## 4 Introduciendo información a priori sobre la imagen original

Los investigadores en procesamiento de la señal sugieren la idea de minimizar la ecuación (3) con la condición de acotar  $\| \mathbf{Cf} \|^2$ , donde el término  $\mathbf{Cf}$  representa un filtro paso alto sobre la imagen. Usualmente se toma la laplaciana, de forma que tenemos

$$(\mathbf{Cf})(i, j) = f(i, j) - 0.25 [f(i-1, j) + f(i+1, j) + f(i, j-1) + f(i, j+1)]. \quad (8)$$

Acotando la laplaciana estamos introduciendo una condición de suavidad sobre la imagen original.

Nuestro problema se convierte entonces en encontrar  $\underline{\mathbf{f}}$  que cumpla

$$\underline{\mathbf{f}} = \arg \min_{\mathbf{f}} \{ \| \mathbf{g} - \mathbf{Df} \|^2 + \lambda \| \mathbf{Cf} \|^2 \}. \quad (9)$$

La solución de esta ecuación viene dada por

$$\underline{\mathbf{f}} = (\mathbf{D}^t \mathbf{D} + \lambda \mathbf{C}^t \mathbf{C})^{-1} \mathbf{D}^t \mathbf{g}, \quad (10)$$

que recibe el nombre de *Mínimos Cuadrados Regularizados* dentro de la comunidad de procesamiento de la señal.

Podemos ahora ver el problema desde la formulación estadística e intentar incluir, junto con la distribución condicionada  $p(\mathbf{g} | \mathbf{f})$  dada en la ecuación (4), una distribución a priori,  $p(\mathbf{f})$ , sobre el tipo de restauraciones que esperamos. A continuación combinaremos ambas distribuciones con el objeto de obtener la distribución a posteriori,  $p(\mathbf{f} | \mathbf{g})$ . Básicamente es como el problema de las bolas y las urnas pero con imágenes observadas e imágenes no degradadas respectivamente.

Pero, ¿cuál es la distribución a priori sobre las imágenes que vamos a utilizar? Una primera aproximación consiste en decir que esperamos que las imágenes sean suaves (un pixel en la imagen se parece a la media de sus cuatro vecinos más próximos). Esto equivale a utilizar como modelo de imagen

$$p(\mathbf{f}) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_s^2} \| \mathbf{Cf} \|^2 \right], \quad (11)$$

donde  $\mathbf{C}$  es la matriz correspondiente a una laplaciana,  $\sigma_s^2$  es la varianza del modelo y la ecuación (11) define, en la literatura estadística, un modelo Simultáneo Autorregresivo o SAR (ver [13]).

Una vez decidido el modelo de imagen que vamos a utilizar y el modelo de degradación del que disponemos, hemos de estudiar la distribución a posteriori,  $p(\mathbf{f} | \mathbf{g})$ .

La formulación bayesiana del problema de restauración de imágenes (el nombre de bayesiana le viene por el uso de probabilidades a priori, condicionadas y a posteriori y por la aplicación de la regla de Bayes para calcular la distribución a posteriori) nos permite elegir, y tal vez ahí esté una de sus mayores riquezas, diferentes estimadores para la imagen original. Uno de ellos es la moda de la distribución a posteriori (MAP); otro es la media de la distribución a posteriori, que en algunos casos coincide con el MAP, aunque hay muchos más estimadores [7].

Si elegimos el MAP para nuestro problema con el modelo de imagen de la ecuación (11) y el modelo condicional dado en la ecuación (4), tenemos que dicho estimador,  $\hat{\mathbf{f}}$ , verifica

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg \max_{\mathbf{f}} p(\mathbf{f} | \mathbf{g}) = \arg \max_{\mathbf{f}} \{ p(\mathbf{f}) p(\mathbf{g} | \mathbf{f}) \} = \arg \min_{\mathbf{f}} \left\{ \frac{1}{2\sigma_r^2} \| \mathbf{g} - \mathbf{Df} \|^2 + \frac{1}{2\sigma_s^2} \| \mathbf{Cf} \|^2 \right\}. \quad (12)$$

Resulta evidente que las soluciones de las ecuaciones (10) y (12) son las mismas para  $\lambda = \sigma_r^2 / \sigma_s^2$ .

Es muy importante destacar que la aproximación bayesiana al problema de la restauración de imágenes permite introducir modelos de imágenes mucho más complejos. Un ejemplo de dichos modelos son aquellos en los que la condición de suavidad se sustituye por condiciones de suavidad dentro de las regiones pero no entre regiones diferentes, que entran dentro de lo que se ha dado en llamar Campos Aleatorios de Markov para la restauración de imágenes (ver por ejemplo [7, 5]).

Antes de pasar a comentar algunas de las aplicaciones de la restauración parece apropiado mencionar dos temas por los que hemos pasado sin destacar su importancia.

Por una parte, es obvio que la búsqueda de soluciones a nuestro problema de restauración se convierte al final en un problema de optimización, cuya solución será más o menos fácil de encontrar en función de la complejidad del mismo. En este sentido, el uso de matrices circulantes o circulantes por bloques nos permitirá encontrar la solución de la ecuación (10) mediante la transformada de Fourier. Si los modelos son más complejos, tendremos que usar técnicas de optimización basadas en gradiente descendente, gradiente conjugado, no convexidad gradual, etc. (ver [7]). También podemos usar los algoritmos basados en cadenas de Markov puestos de moda por los hermanos Geman a raíz de la publicación del trabajo [4].

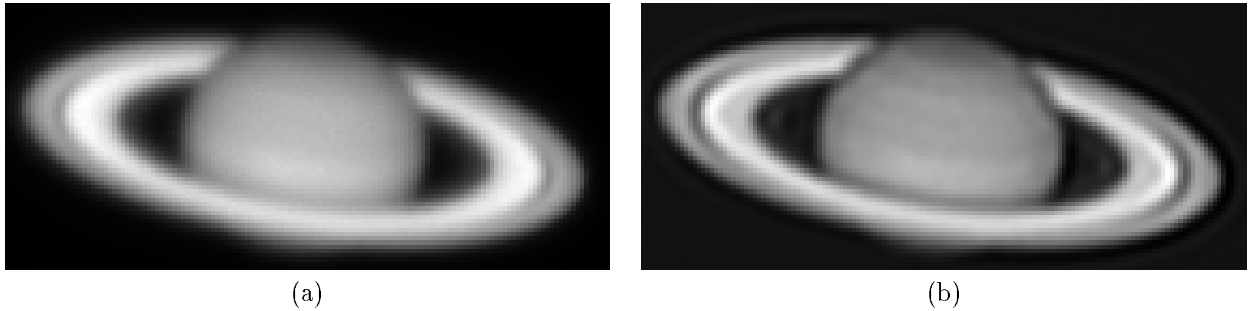


Figura 2: (a) Imagen de Saturno observada desde la Tierra. (b) Restauración con el método propuesto en [9].

Por otra parte, no hemos hablado tampoco sobre la estimación de los parámetros desconocidos, como las varianzas o el parámetro de regularización  $\lambda$ . Una extensa recopilación de métodos de estimación de estos parámetros desde el punto de vista del procesamiento de la señal puede encontrarse en [3] y una visión estadística del problema en [7]. Recientemente la aproximación Bayesiana jerárquica [10, 11] ha producido interesantes resultados sobre la estimación simultánea de parámetros e imagen.

## 5 Ejemplos de restauración de imágenes

Uno de los campos más importantes de aplicación de la restauración ha sido, y seguramente continuará siendo, la restauración de imágenes astronómicas. No sólo es necesario restaurar las imágenes astronómicas tomadas desde la Tierra, sino también las enviadas inicialmente por el telescopio espacial Hubble antes de que fuera solucionado el problema de su espejo principal. Incluso hoy, las imágenes obtenidas antes de la corrección de la aberración del espejo principal del Hubble sirven, por su comparación con las nuevas, como un excelente banco de pruebas para los métodos de restauración (una excelente referencia sobre la aplicación de los métodos de restauración en astronomía se puede encontrar en [12]).

La figura 2 muestra un ejemplo de aplicación de los métodos de restauración a una imagen de Saturno tomada desde la Tierra.

El campo de la Medicina proporciona un excelente terreno para la aplicación de métodos de restauración y reconstrucción a partir de proyecciones. La referencia [2] muestra aplicaciones de técnicas de procesamiento de imágenes en Medicina.

Antes de terminar este muy breve recorrido por algunas de las aplicaciones de la restauración de imágenes, consideramos importante mencionar un campo con un enorme potencial, tanto actual como futuro: la codificación de imágenes y vídeo.

Cuanto más se desarrollan las técnicas para comprimir las imágenes, más información se pierde al querer reducir la cantidad de bits necesaria para representar la imagen y más patente se hace la aparición de artificios como, por ejemplo, bloques. Un caso típico es el de la codificación mediante transformada coseno discreta, empleada, entre otros, por el estándar de compresión JPEG. También se observan artificios cuando se usan otras técnicas como cuantificación de vectores o *wavelets*. La supresión de esos artificios puede abordarse, sin lugar a duda, como un problema de restauración-reconstrucción de la imagen comprimida.

En la figura 3(a) se muestra una imagen comprimida usando JPEG, donde la razón de compresión es de 83:1. Mientras que los bloques son visibles en la imagen comprimida, en la figura 3(b) se muestra un procesamiento posterior donde los bloques se han suprimido (ver [8]).

## 6 Otros aspectos de la restauración de imágenes

En este trabajo hemos presentado los fundamentos de la restauración de imágenes, así como algunos de sus campos de aplicación. Sin embargo, por la brevedad del mismo no hemos podido mencionar muchos temas importantes y muchos campos de aplicación.

Aspectos como la adaptatividad de los métodos al tipo de regiones sobre las que se trabaje, o incluso la modelización del conocimiento a priori del problema que abordemos son temas de enorme interés. La restauración de imágenes multibanda, y en particular de imágenes en color, plantea otro campo de aplicación muy interesante, con enormes repercusiones tanto en la compresión de imágenes como en la fusión y registrado de las mismas, una fusión y registrado que pueden resolver la trama del libro de Ken Follet, *El tercer gemelo*.

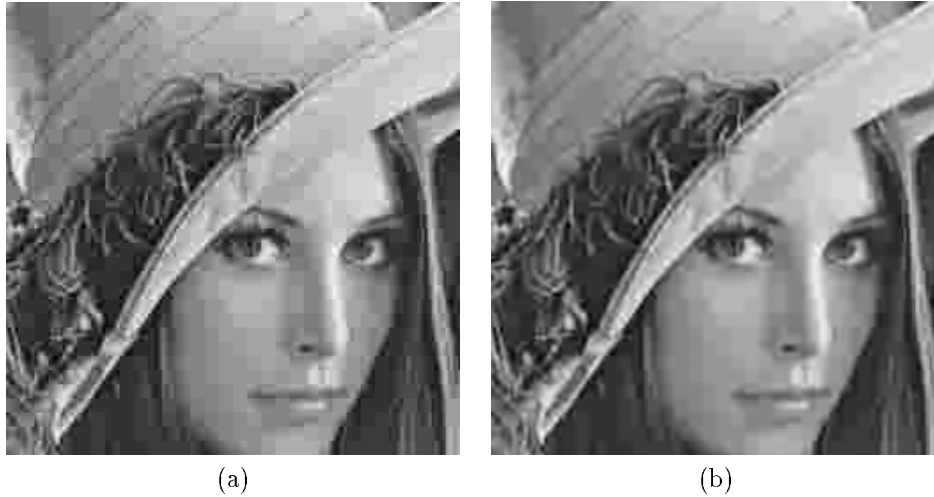


Figura 3: (a) Imagen Codificada usando JPEG. (b) Imagen restaurada usando el algoritmo en [8].

## Referencias

- [1] M.K. Banham y A.K. Katsaggelos, "Digital Image Restoration", *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 14, pp. 24-41, 1997.
- [2] Z.-H. Cho, J.P. Jones y M. Singh, *Foundations of Medical Imaging*, John Wiley & Sons, 1993.
- [3] N.P. Galatsanos y A.K. Katsaggelos, "Methods for Choosing the Regularization Parameter and Estimating the Noise Variance in Image Restoration and their Relation", *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. **IP-1**, pp. 322-336, 1992.
- [4] D. Geman y S. Geman, "Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of Images", *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. **PAMI-6**, pp. 721-741, 1984.
- [5] W.R. Gilks, S. Richardson y D.J. Spiegelhalter, editores, *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, Chapman and Hall, 1996.
- [6] A.K. Katsaggelos, editor, *Digital Image Restoration*, Springer Series in Information Sciences, vol. 23, Springer-Verlag, 1991.
- [7] S.Z. Li, *Markov Random Field Modelling in Computer Vision*, Springer Series in Computer Science Workbook, 1995.
- [8] J. Mateos, A.K. Katsaggelos y R. Molina, "Estimating and Transmitting Regularization Parameters for Reducing Blocking Artifacts", en *Proc. of the 13th International Conference on Digital Signal Processing Santorini, Grecia*, pp. 209-212, 1997
- [9] R. Molina, "On the Hierarchical Bayesian Approach to Image Restoration. Application to Astronomical Images", *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. **PAMI-16**, pp. 1222-1228, 1994.
- [10] R. Molina y A.K. Katsaggelos, "On the Hierarchical Bayesian Approach to Image Restoration and the Iterative Evaluation of the Regularization Parameter", en *Proc. of the Visual Communication and Image Processing'94*, Chicago, EEUU, pp. 244-251, 1994.
- [11] R. Molina y A.K. Katsaggelos, "Prior Models and Methods of Choosing the Unknown Parameters in the Bayesian and Regularization Approaches to Image Restoration", en *Proc. of the IEEE Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, Ed. I. Pitas, pp. 102-105, 1995.
- [12] J. Nuñez, editor, Special Issue: Image Reconstruction and Restoration in Astronomy, *International Journal Imaging Systems and Technology*, vol. 6, n. 4, 1995
- [13] B.D. Ripley, *Spatial Statistics*, John Wiley, New York, pp. 88-90, 1981.